



# Hydrodynamique et brisure de symétrie chirale : application au gaz de pions et calcul de coefficients de transport

Céline Pujol

## ► To cite this version:

Céline Pujol. Hydrodynamique et brisure de symétrie chirale : application au gaz de pions et calcul de coefficients de transport. Physique mathématique [math-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2003. Français. NNT : . tel-00006288

**HAL Id: tel-00006288**

**<https://theses.hal.science/tel-00006288>**

Submitted on 18 Jun 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 139-2003

N° attribué par la bibliothèque : LYCEN T 2003-32

UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD  
Institut de Physique Nucléaire de Lyon

**Mémoire de thèse**  
pour l'obtention du grade de  
**Docteur de l'Université Claude Bernard de Lyon-I**  
**Spécialité : Physique nucléaire théorique**  
au titre de l'École Doctorale de Physique et d'Astrophysique Fondamentale de Lyon

présenté et soutenu publiquement le *29* septembre *2003*  
par Mlle Céline PUJOL

---

# **Hydrodynamique et brisure de symétrie chirale : application au gaz de pions et calcul de coefficients de transport**

---

Devant la commission d'examen formée de :  
M. Guy CHANFRAY (Directeur de thèse)  
M. Dany DAVESNE  
Mme Magda ERICSON  
M. Maurice KIBLER (Président)  
Mme Madeleine SOYEUR (Rapporteur)  
M. Klaus WERNER (Rapporteur)



# Remerciements

Je remercie les membres de mon jury pour tout l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Madeleine Soyeur et Klaus Werner, rapporteurs, pour leurs précieuses remarques concernant le manuscrit. Magda Ericson et Guy Chanfray pour leurs conseils tout au long de la thèse. Maurice Kibler qui a accepté de présider ce jury. Et bien évidemment un grand merci à Dany Davesne pour avoir encadré ce travail, qu'il pleuve ou qu'il vente!!!

Dany à également innové un nouveau concept, la thèse-marathon. Non pas que ce travail fut une course mais il a fallu courir, pour de vrai, même sous la pluie!!! En tous cas, merci pour cette expérience qui m'a également permis de partager de sympathiques moments avec Micaela, Nathalie, Aldo, Nick, Thierry...

Merci à mes co-thésards et/ou co-bureau Aziz et Hubert pour leurs coups de pouce et leurs intermèdes gastronomiques, les gâteaux du grand chef cuisinier cinéphile et les pâtisseries tuni-siennes accompagnées de thé ou cappuccino... La grande sagesse d'Aziz me fut toujours d'un grand secours...

Merci à Lucile Chosson, Sylvie Flores et les membres du service informatique pour leur grande disponibilité.

Ces années furent ensoleillées par tous mes compagnons de café et/ou de cantine, d'abord Gaëlle, Karine et Clo, Eric... et Nono -psy à ses heures... merci pour tout! Et ensuite, Moïse, ses innombrables bides et cours sur les p'tits pois, entre autres... Franck, sacré payeur de rinces, Nico, Carole et tous les restos, ciné...

Merci enfin Nathalie, Maman, Papa et Gaby, pour votre soutien constant et en plus merci les filles pour le pot!!!



# Résumé

Le cadre général dans lequel se situe cette thèse est l'étude des propriétés de la matière hadronique chaude et dense produite lors des collisions d'ions lourds ultrarelativistes. Cette matière chaude et dense est majoritairement constituée de pions, les particules les plus légères du monde hadronique. Leur faible masse provient de leur nature même : ce sont les bosons de Goldstone de la symétrie chirale.

L'évolution du gaz de pions peut se faire, dès les premiers instants suivant sa formation, dans le cadre de l'hydrodynamique relativiste. Dans une première partie nous présentons l'hydrodynamique en présence de symétrie brisée en insistant particulièrement sur le fait que les modes de Goldstone sont à mettre sur un pied d'égalité avec les grandeurs conservées : à tous deux correspondent des modes hydrodynamiques. Nous montrons également comment ces "nouveaux" modes, caractéristiques de la brisure d'une symétrie, modifient les équations d'évolution. Partant de l'exemple d'un système superfluide, c'est-à-dire d'un système présentant une brisure de la symétrie  $U(1)$ , nous présentons, dans la deuxième partie, les équations hydrodynamiques d'un fluide au sein duquel la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  est brisée. Nous appliquons ensuite ces équations, d'une part aux collisions d'ions lourds ultrarelativistes dans le cadre du modèle de Bjorken, et d'autre part à la détermination des coefficients de transport. Enfin, la troisième partie est consacrée au calcul de la viscosité de cisaillement dans le cadre de modèles microscopiques de théorie des champs, à savoir les modèles  $\lambda\phi^4$  et  $\sigma$ -non linéaire.



# Abstract

The general frame of this work is the study of the hot and dense matter produced in ultra-relativistic heavy ion collisions. This hot and dense matter is mainly constituted of pions, the lowest mass excitation of the hadronic spectrum. This small mass is due to the Goldstone nature of the pion associated to the breaking of chiral symmetry.

The pion gas evolution can be well described by relativistic hydrodynamics. In a first part, we examine how the theory of hydrodynamics itself is modified due to the presence of Goldstone modes. In particular, we show that Goldstone modes are also hydrodynamic modes like those associated to conserved quantities. In a second part, starting from the standard superfluid system, which presents a breaking of  $U(1)$ , we generalize to a chiral fluid, that is a fluid with a breaking of  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . We then apply the equations for this chiral fluid to heavy ion collisions in the context of the Bjorken model and to the determination of transport coefficients. In the last part, we compute explicitly the shear viscosity from microscopic models, namely  $\lambda\phi^4$  and the non-linear  $\sigma$  model.





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
 <b>I Hydrodynamique</b>	 <b>3</b>
<b>1 Modes hydrodynamiques et fluide normal</b>	<b>5</b>
1.1 Description hydrodynamique . . . . .	5
1.2 Modes hydrodynamiques . . . . .	6
1.3 Transport . . . . .	7
1.4 Équations hydrodynamiques du fluide normal . . . . .	9
1.5 Formules de Kubo . . . . .	13
<b>2 Brisure de symétrie et modes de Goldstone</b>	<b>17</b>
2.1 Description du phénomène : le paramètre d'ordre . . . . .	17
2.2 Modes de Goldstone . . . . .	17
2.3 Exemple du superfluide . . . . .	19
<b>3 Hydrodynamique relativiste</b>	<b>21</b>
3.1 Fluide parfait relativiste . . . . .	21
3.2 Dissipation et formules de Kubo relativistes . . . . .	22
3.3 Le superfluide relativiste . . . . .	23
 <b>II Hydrodynamique de la matière nucléaire</b>	 <b>25</b>
<b>4 Matière nucléaire et brisure de symétrie chirale</b>	<b>27</b>
4.1 Rappels sur la symétrie chirale . . . . .	27
4.1.1 Symétries vectorielles et axiales . . . . .	28
4.1.2 La symétrie chirale et sa brisure spontanée . . . . .	28
4.2 Modèle hydrodynamique global . . . . .	29
4.2.1 Variables hydrodynamiques, crochets de Poisson et hamiltonien du système	30

4.2.2	Équations du mouvement - invariance - développement d'ordre quadratique	31
4.2.3	Système d'équations hydrodynamiques sous forme covariante . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Application aux collisions d'ions lourds</b>	<b>35</b>
5.1	Rappels sur le modèle de Bjorken . . . . .	35
5.1.1	Collisions d'ions lourds ultrarelativistes . . . . .	35
5.1.2	Modèle proprement dit . . . . .	37
5.1.3	Principaux résultats du modèle . . . . .	38
5.2	Équations hydrodynamiques simplifiées . . . . .	39
5.2.1	Cas particulier où les baryons sont absents . . . . .	39
5.2.2	Développement explicite en champ de pion . . . . .	39
5.3	Brisure de symétrie chirale dans la géométrie de Bjorken . . . . .	40
5.3.1	Développements au premier et deuxième ordre en $\vec{\tau}.\vec{\pi}$ - Zone centrale . . .	40
5.3.2	Forme du champ de pion $\vec{\pi}$ . . . . .	42
5.3.3	Dépendance en température des constantes de désintégration . . . . .	44
5.4	Prise en compte de la viscosité . . . . .	44
5.4.1	Pions de masse nulle . . . . .	44
5.4.2	Pions massifs . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Dissipation</b>	<b>49</b>
6.1	Hydrodynamique relativiste du superfluide : processus dissipatifs . . . . .	49
6.2	Hydrodynamique du fluide chirale . . . . .	50
6.3	Conclusion . . . . .	54
<b>III</b>	<b>Calcul de <math>\eta</math></b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Modèle <math>\lambda\phi^4</math></b>	<b>57</b>
7.1	Méthode de S.Jeon [23] . . . . .	57
7.2	Résultats numériques . . . . .	61
7.3	Méthode de U.Heinz . . . . .	61
7.3.1	Le formalisme CTP . . . . .	61
7.3.2	Calcul de $\eta$ . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Modèle <math>\sigma</math>-non linéaire</b>	<b>65</b>
8.1	Rappels sur le modèle $\sigma$ . . . . .	65
8.1.1	Modèle $\sigma$ linéaire . . . . .	65
8.1.2	Modèle $\sigma$ non linéaire . . . . .	67
8.2	Expression de la viscosité . . . . .	69
8.3	Calculs à deux boucles . . . . .	71
8.3.1	Calcul à une boucle . . . . .	72
8.3.2	Calcul à deux boucles . . . . .	73
8.4	Résultats numériques . . . . .	74
	<b>Conclusion</b>	<b>77</b>

<b>A</b>	<b>Forme du tenseur des contraintes</b>	<b>79</b>
A.1	Déformation dans les écoulements . . . . .	79
A.2	Dynamique des fluides . . . . .	80
A.2.1	Tenseur des contraintes . . . . .	80
A.2.2	Équations du mouvement . . . . .	81
<b>B</b>	<b>Théorie de la réponse linéaire</b>	<b>83</b>
B.1	Évolution d'un système soumis à un hamiltonien dépendant du temps et point de vue d'interaction[27] . . . . .	83
B.2	Réponse linéaire . . . . .	83
B.3	Théorème fluctuation-dissipation . . . . .	84
<b>C</b>	<b>Théorie quantique des champs</b>	<b>85</b>
C.1	A température nulle . . . . .	85
C.1.1	Cas libre . . . . .	85
C.1.2	Dans un milieu . . . . .	86
C.2	A température finie . . . . .	86
C.2.1	Le formalisme à temps imaginaire . . . . .	87
C.2.2	Formalisme à temps réel . . . . .	87
C.2.3	Propagateurs complets et self-énergie . . . . .	89
<b>D</b>	<b>Règles de coupure</b>	<b>91</b>
D.1	A température nulle : règles de Cutkosky . . . . .	91
D.2	A température finie, règles de Kobes et Semenoff . . . . .	92
D.3	Règles de S. Jeon . . . . .	93
<b>E</b>	<b>Calcul numérique de <math>\eta</math></b>	<b>95</b>



# Introduction générale

La matière hadronique, à l'échelle des quarks et des gluons est bien décrite par la chromodynamique quantique (QCD), théorie fondamentale des interactions fortes. Cette théorie de jauge possède deux propriétés remarquables, la liberté asymptotique et le confinement de la couleur. La liberté asymptotique signifie que l'intensité de l'interaction entre les quarks décroît avec la distance : les quarks se comportent comme des particules libres lorsque leur distance relative tend vers zéro. Les quarks possèdent une charge (la couleur) et le confinement nous indique qu'il est impossible d'observer une configuration de quarks colorée avec une énergie et une taille finies. Dans des conditions extrêmes de température et/ou densité, on s'attend cependant à observer un plasma de quarks et de gluons (QGP), matière nucléaire déconfinée. Les expériences de collisions d'ions lourds ultra-relativistes actuelles ont en partie pour objet l'étude de ce plasma. Mais, même si le QGP n'est pas formé lors de ces collisions (il n'existe pas encore de preuve formelle), ces dernières fournissent quoiqu'il arrive des informations précieuses sur les propriétés de la matière nucléaire dense et chaude.

La QCD possède une autre caractéristique, la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ . Cette symétrie n'est pas réalisée au niveau du spectre des particules : elle est spontanément brisée. Cette brisure est à l'origine de l'existence de modes de Goldstone qui doivent être identifiés avec les pions. Ces particules légères (leur masse non nulle est due à la brisure explicite de la symétrie) sont produites en grande quantité dans les collisions. Une fois encore on s'attend à un phénomène lié aux conditions extrêmes de température et de densité réalisées dans les collisions : la restauration (même partielle) de la symétrie chirale. Cette transition de phase est caractérisée par un paramètre d'ordre, le condensat de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ . A basse température, seules contribuent les excitations thermiques du vide de QCD associées aux particules les plus légères : les pions. Il est alors possible de construire des théories effectives décrivant la matière hadronique directement en termes de pions (le modèle sigma non linéaire par exemple).

C'est dans ce cadre général que se situe le sujet de cette thèse, la description d'un gaz de pions hors équilibre. Pour traiter le problème, nous allons dans une première partie nous intéresser à la description hydrodynamique d'un système et plus particulièrement aux modes hydrodynamiques (phénomènes dissipatifs), qu'ils soient liés aux quantités conservées ou à la brisure spontanée d'une symétrie continue. Nous traiterons les exemples du fluide normal et du superfluide ainsi que de leur généralisation au cas relativiste. Il sera également question de physique statistique hors équilibre, technique permettant le calcul des coefficients de transport en termes de fonctions de corrélation. Les coefficients de transport sont des éléments importants pour la compréhension des phénomènes dissipatifs pouvant survenir dans un système physique. Ils permettent de manière générale une caractérisation au niveau macroscopique de ce qui se passe au niveau microscopique dans un système hors équilibre : ils fournissent des informations sur la manière dont réagit un système lorsqu'une quantité ( $T$ ,  $\mu$ , etc.) présente des inhomogénéités, c'est-à-dire est différente en chaque point alors qu'elle devrait être uniforme à l'équilibre. Le champ d'application de tels calculs est

extrêmement vaste. Par exemple dans le cas de la matière nucléaire, la détermination de la viscosité de cisaillement permet d'obtenir indirectement des informations sur l'équation d'état. Dans le cas des collisions d'ions lourds ultrarelativistes, le calcul des temps de relaxation associés aux différents coefficients de transport sont très importants du point de vue phénoménologique car ils fournissent les ordres de grandeur de différentes échelles de temps nécessaires à une description correcte de l'évolution de la matière hadronique produite. Enfin, une bonne connaissance du comportement critique de ces mêmes coefficients pour un gaz de quarks et de gluons permettrait d'obtenir des informations sur la transition de phase de déconfinement.

La deuxième partie sera consacrée à l'hydrodynamique en présence de symétrie chirale brisée. Après un rappel sur cette symétrie, nous introduirons les équations hydrodynamiques nécessaires à la description correcte d'un gaz de pions, prenant en compte les variables hydrodynamiques supplémentaires dues à la brisure. En effet, aux modes de Goldstone que sont les pions, on associe une équation hydrodynamique qui complète le système d'équations de conservation. La résolution du système d'équations conduit à des termes supplémentaires dans l'expression de l'énergie, la pression... Pour traiter les collisions d'ions lourds, plusieurs approximations et hypothèses sont faites, notamment l'utilisation d'équations hydrodynamiques de fluide parfait. Nous présenterons une application, dans le cadre de la géométrie de Bjorken, pour évaluer l'influence de la prise en compte de la brisure de symétrie, et de la viscosité, sur le profil d'évolution de la température. Enfin, nous établirons les équations dissipatives d'un fluide avec symétrie chirale brisée, mettant en jeu de nombreux coefficients de transport.

Dans la troisième partie, en utilisant les expressions générales des coefficients de transport, nous présenterons en particulier le calcul de la viscosité de cisaillement pour un gaz de bosons en interaction dans le cadre de la théorie quantique des champs. Nous rappellerons les résultats établis dans le cas de la théorie  $\lambda\Phi^4$  en utilisant tout d'abord une approche diagrammatique puis une approche fondée sur le formalisme des fonctions de Green hors équilibre. Puis nous ferons le calcul pour un gaz de pions avec un lagrangien de modèle sigma non linéaire.

Première partie  
Hydrodynamique





# Chapitre 1

## Modes hydrodynamiques et fluide normal

Le comportement d'un système à grand nombre de particules est extrêmement complexe et son traitement à l'échelle microscopique est a priori impossible dans le cas général. Cependant il existe des situations particulières pour lesquelles des théories bien établies existent. C'est notamment le cas pour les systèmes proches de l'équilibre qui sont décrits dans le cadre de l'hydrodynamique.

### 1.1 Description hydrodynamique

Un fluide est un milieu continu. Pour comprendre ce que cela signifie il faut décomposer le système en cellules de taille caractéristique  $L$ , éléments de volume petits à l'échelle macroscopique mais grands à l'échelle microscopique c'est-à-dire contenant un grand nombre de particules (on parle de cellules mésoscopiques). Les propriétés en "un point"  $\vec{r}$  à un instant donné résultent donc en fait d'une moyenne sur les molécules. On peut ainsi par exemple définir pour chaque cellule une densité qui est constante bien qu'à l'échelle hydrodynamique  $L_h$  (taille caractéristique de variation des grandeurs du système), la densité varie. L'approximation du continu n'est valable que lorsque le libre parcours moyen  $l$  des molécules est très petit devant  $L_h$  [1] :

$$l \ll L \ll L_h \quad (1.1)$$

Ensuite le fluide peut se trouver dans un état hors équilibre. Il existe une gamme d'états pour lesquels une théorie complète permet sa caractérisation et la description de son évolution : c'est le régime hydrodynamique. C'est un régime dans lequel les phénomènes sont caractérisés par une échelle de longueur et une échelle de temps. Il faut que la dimension typique sur laquelle varie une grandeur soit supérieure au libre parcours moyen et que le temps caractéristique pendant lequel varient ces grandeurs soit supérieur au temps entre deux collisions. Il faut donc que l'on puisse, à l'intérieur d'une cellule, définir des grandeurs d'équilibre (local) telles que température, etc. qui aient un sens c'est-à-dire qu'il faut que le système soit assez grand et assez stable dans le temps pour être effectivement à l'équilibre. Le régime hydrodynamique correspond donc aux excitations de basses fréquences et de grandes longueurs d'onde ; le nombre d'onde  $k = \frac{2\pi}{L_h}$  et la fréquence  $w$  sont alors petits ( $kl \ll 1$  et  $w\tau_c \ll 1$ ).

On supposera donc toujours qu'en chaque point, il existe un équilibre local : le système, qui dans son ensemble est hors équilibre, est décomposé en cellules à l'équilibre thermodynamique [2]. Dans chaque cellule il est donc possible d'appliquer les lois valables à l'équilibre et, à nouveau,

les paramètres caractérisant le système (température, pression...) sont donc constants dans une cellule mais varient d'une cellule à l'autre. Partant d'un état fortement hors équilibre, les collisions assurent dans un premier temps la relaxation vers l'équilibre local. Et c'est une fois cet équilibre local atteint que le traitement hydrodynamique du système devient valide.

Imaginons maintenant une perturbation extérieure sur un système dans le régime hydrodynamique. À cause du grand nombre de constituants et des interactions entre ces constituants, il est évident que des phénomènes collectifs peuvent apparaître. Certains de ces modes collectifs, que l'on appelle modes hydrodynamiques, et qui possèdent toute l'information sur les propriétés dynamiques macroscopiques d'un système, ont des caractéristiques bien particulières que l'on va décrire maintenant.

## 1.2 Modes hydrodynamiques

On considère un système globalement hors équilibre (mais cependant dans le régime hydrodynamique) soumis à des perturbations diverses. Pour la plupart des perturbations, le processus de relaxation est efficace, c'est-à-dire que le système relaxe vers l'équilibre avec un temps caractéristique très court (les processus collisionnels dans un gaz par exemple, ont un temps caractéristique  $\tau_c \simeq 10^{-12}s$ ). Mais si maintenant la perturbation concerne une quantité conservée (énergie, impulsion, nombre de particules, etc.) alors le processus de relaxation peut devenir extrêmement lent dans la limite basse fréquence, grande longueur d'onde (limite hydrodynamique). En effet, un excès local en un endroit du système est forcément compensé par un déficit (puisque l'on considère une grandeur conservée) qui peut se trouver à une distance de l'ordre de la taille du système ; le cas simple d'une perturbation sinusoïdale est représenté par la figure suivante [3] :

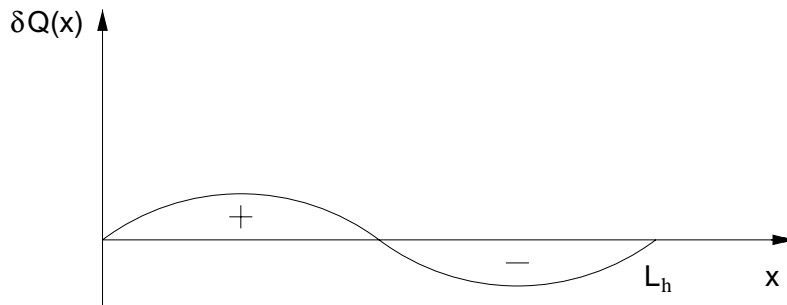


FIG. 1.1: Faible perturbation sinusoïdale d'une quantité conservée.

Un mode collectif se met alors en place et assure le transport de la quantité excédentaire vers la région déficitaire (sur une distance de l'ordre de  $L_h/2$ ) et le retour à l'équilibre s'effectue en un temps très long. L'origine profonde de la séparation des échelles de temps provient du fait que les inhomogénéités spatiales d'une grandeur conservée ne peuvent pas disparaître localement et donc instantanément. Le processus de relaxation se fait donc uniquement par transport, diffusif ou convectif, des régions de forte densité vers les régions de faible densité et non par amortissement local, comme pour les autres perturbations.

Par exemple, dans le fluide normal (cf. 1.4), les grandeurs conservées sont le nombre de particules, l'énergie et la quantité de mouvement. Comme à chacune des quantités conservées dans un système on associe un mode hydrodynamique (on verra ultérieurement (cf. 2) que la réciproque est fausse), cela signifie qu'il existe cinq modes hydrodynamiques pour un fluide normal, c'est-à-dire

cinq modes qui relaxent lentement dans la limite basse fréquence, grande longueur d'onde. Plus précisément, on peut montrer que la constante de temps est inversement proportionnelle au carré du nombre d'onde, donc proportionnelle au carré de la longueur caractéristique des inhomogénéités spatiales :

$$\tau_R \propto \frac{1}{k^2} \propto L_h^2 \quad \lim_{k \rightarrow 0} \tau_R = +\infty \quad (1.2)$$

Dans la limite  $k \rightarrow 0$ ,  $\tau_R$  devient donc infini : les excès associés aux quantités conservées mettent un temps infini pour disparaître et la durée de vie d'un mode hydrodynamique devient alors infinie.

Les considérations développées jusqu'à présent sont tout à fait générales et indépendantes de la cinématique. Nous allons donc à présent étudier les équations hydrodynamiques dans le détail.

## 1.3 Transport

Pour introduire la notion de transport, considérons les variables extensives  $Q_i(t)$  d'un système. Pour chacune de ces quantités, il existe une loi de conservation (équation de bilan) qui s'écrit de façon générale :

$$\frac{\partial \rho_{Q_i}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\text{div} \cdot \vec{j}_{Q_i} + \sigma_{Q_i} \quad (1.3)$$

où  $\rho_{Q_i}(\vec{x}, t)$  est la densité locale de  $Q_i(t)$ ,  $\vec{j}_{Q_i}$  est la densité de courant (flux) associé à  $Q_i$  et  $\sigma_{Q_i}$  est la production (ou consommation) éventuelle de  $Q_i$ . Dans le cas d'une grandeur conservée, il n'y a pas de source,  $\sigma_{Q_i} = 0$ . La forme du flux dépend de la quantité considérée. Il peut être convectif ( $\vec{j}_{Q_i} = \rho_{Q_i} \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la vitesse locale), comme pour le bilan de la masse, et/ou diffusif, conductif... On peut ainsi écrire les bilans de masse, charge, énergie, quantité de mouvement... qui sont des quantités conservées (en l'absence de forces extérieures) et d'entropie, qui est conservée en l'absence de dissipation (phénomènes irréversibles).

La deuxième étape dans l'établissement des équations de transport consiste à déterminer la dépendance de ces flux dans les "forces" qui leur donnent naissance. Il n'y a pas en général de relation rigoureuse : on considère alors des relations phénoménologiques. Si l'on effectue un développement au voisinage de l'équilibre ( $\vec{j}_{Q_i} = \vec{0}$ ) dans les forces, la théorie linéaire relie les flux aux forces par des coefficients de proportionnalité (uniquement fonction des variables d'état du système) que l'on appelle coefficients de transport. Ces coefficients phénoménologiques ne sont pas tous indépendants, ils doivent satisfaire le second principe de la thermodynamique (production d'entropie positive), le principe de Curie et les relations de réciprocité d'Onsager. Nous utiliserons ces propriétés au chapitre 6.

Le courant est, dans la plupart des cas, créé par le gradient d'une quantité  $A_i$  associée à  $Q_i$ , et tend à ramener le système vers l'équilibre, c'est-à-dire vers l'absence de gradient. On peut alors écrire si les gradients sont faibles :

$$\vec{j}_{Q_i} = -\alpha_i \overrightarrow{\text{grad}} A_i \quad (1.4)$$

Les  $\alpha_i$  sont les coefficients de transport. En combinant ces équations de transport avec les équations de conservation (bilan) précédentes, on obtient des équations de type "diffusion" qui s'écrivent :

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = D_i \Delta A_i \quad (1.5)$$

où les  $D_i$  sont les coefficients de diffusion (reliés aux coefficients de transport), de dimension  $L^2 T^{-1}$ . Cette dernière équation donne l'évolution temporelle de la grandeur thermodynamique  $A_i$

et peut être résolue si les conditions aux limites sont précisées. En effectuant une transformée de Fourier (sur les composantes spatiales), on trouve une solution de la forme  $A_i(t) = A_i(0) e^{-t/\tau}$  avec  $\tau = 1/(D_i k^2)$ , ce qui correspond au temps de relaxation, qui diverge à la limite hydrodynamique, comme mentionné au paragraphe précédent.

Dans les fluides [1], il existe généralement trois types de transports diffusifs (de quantités conservées) :

- transport de chaleur dû à un gradient de température  $T$ ,
- transport de masse dû à un gradient de concentration,
- transport de quantité de mouvement dû à un gradient de vitesse.

Chacun de ces gradients crée donc un flux associé qui s'oppose à ces gradients. Dans l'approximation linéaire, ces flux sont simplement proportionnels à ces gradients, et permettent de définir les coefficients de transport.

Dans le cas de la diffusion de chaleur, on a  $\vec{J}_Q(\vec{r}, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(\vec{r}, t)$ , où  $\lambda$  est par définition la conductivité thermique du milieu. A partir de l'équation de conservation de l'énergie, on peut en déduire l'équation de diffusion associée (appelée équation de Fourier) :

$$\frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} = \kappa \Delta T(\vec{r}, t)$$

où  $\kappa = \lambda/(\rho c_V)$  est la diffusivité thermique ( $\rho$  est la masse volumique et  $c_V$  la capacité thermique massique).

Pour ce qui est de la diffusion particulaire, on a  $\vec{J}_n(\vec{r}, t) = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(\vec{r}, t)$  (loi de Fick), et l'équation de diffusion associée s'écrit :

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \Delta n(\vec{r}, t)$$

$D$  est à la fois le coefficient de transport et le coefficient de diffusion particulaire. Enfin, pour la diffusion de quantité de mouvement, on écrira dans le cas d'un cisaillement unidimensionnel :  $\frac{F_x(x, t)}{S} = -\eta \frac{\partial v_x(x, t)}{\partial y}$ .  $\vec{F}$  représente la force de friction exercée par une couche de fluide de surface  $S$  sur une couche adjacente et  $F/S$  est la contrainte de cisaillement ou, par analogie aux deux autres équations, le flux associé au transport.  $\eta$  est appelé viscosité dynamique ou de cisaillement. La généralisation à trois dimensions fait intervenir des tenseurs. L'équation de diffusion généralisée à trois dimensions s'écrit pour la vitesse (et donc pour la quantité de mouvement si on multiplie les deux membres par  $\rho$ ) :

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nu \vec{\Delta} \vec{v}(\vec{r}, t)$$

où  $\nu = \eta/\rho$  est le coefficient de diffusion, appelé viscosité cinématique. La viscosité définie précédemment dans le cas particulier du cisaillement simple est associée aux contraintes tangentielles. Mais il existe d'autres contraintes dans le cas général, associées aux variations du fluide par compression, auxquelles correspond un autre coefficient de transport, la viscosité volumique  $\zeta$  (voir Annexe A).

Cette introduction montre que les coefficients de transport apparaissent dans des lois phénoménologiques (macroscopiques) qui indiquent comment un système présentant des inhomogénéités va relaxer vers son équilibre global par l'intermédiaire du transport. L'approche est ici purement macroscopique et la détermination des coefficients de transport relève de l'expérience, si l'on s'affranchit de la mécanique statistique du non-équilibre. Car du point de vue microscopique,

même lorsqu'un système est à l'équilibre, les grandeurs permettant de le décrire fluctuent autour de leur valeur d'équilibre, et ces fluctuations sont caractérisées par des fonctions de corrélation. De plus, que ces écarts aux valeurs d'équilibre soient dus aux fluctuations statistiques ou au contraire à des gradients parce que le système est hors d'équilibre, est de peu d'importance. Dans les deux cas, le mécanisme de relaxation est le même (hypothèse d'Onsager). Il y a donc une relation entre les coefficients de transport et les fonctions de corrélation et il est par conséquent nécessaire, pour calculer les coefficients, de calculer auparavant ces fonctions de corrélation. Pour cela, on dispose du théorème de fluctuation-dissipation (FDT), théorème qui relie la fonction de réponse (dont la partie imaginaire est liée à la dissipation) du système à une perturbation, aux fluctuations (fonctions de corrélation). Dans les paragraphes suivants, nous allons ainsi établir à partir des équations hydrodynamiques d'une part et des fonctions réponse du système d'autre part, les coefficients de transport en termes de fonctions de corrélation.

## 1.4 Équations hydrodynamiques du fluide normal

Dans la limite non relativiste, le fluide normal (i.e. non chargé, isotrope et non superfluide) est décrit par cinq grandeurs locales : la densité d'énergie  $\epsilon$ , la densité particulaire  $n$  et la densité de quantité de mouvement  $\vec{p}$ . Ces grandeurs locales sont associées aux cinq quantités conservées que sont l'énergie, la masse et la quantité de mouvement. Nous écrivons donc les équations d'évolution pour :

- le nombre de particules :

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) + \text{div} \frac{\vec{p}(\vec{r}, t)}{m} = 0 \quad (1.6)$$

où  $n$  est la densité de particules et  $\vec{p}$  la densité d'impulsion.

- l'impulsion :

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{p}(\vec{r}, t) + \text{div} [\tau(\vec{r}, t)] = 0 \quad (1.7)$$

où  $[\tau]$  est le tenseur des contraintes.

- l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}_\epsilon(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

où  $\epsilon$  est la densité d'énergie et  $\vec{j}_\epsilon$  la densité de courant d'énergie.

On a donc cinq variables conservées auxquelles on associe cinq variables intensives :

- la température  $T = \langle T(\vec{r}, t) \rangle_{eq}$ , où  $\langle \dots \rangle_{eq}$  désigne la valeur moyenne à l'équilibre thermodynamique global
- la pression  $P = \langle P(\vec{r}, t) \rangle_{eq}$
- la vitesse moyenne  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  définie par  $\langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle = \langle n(\vec{r}, t) \rangle m \vec{v}(\vec{r}, t)$  qui s'écrit au premier ordre :

$$\langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle = n m \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (1.9)$$

où la valeur moyenne est à l'équilibre local et avec  $n = \langle n(\vec{r}, t) \rangle_{eq}$ .

En dérivant explicitement l'énergie volumique totale  $\epsilon = \epsilon_c + \epsilon_{int}$ , on peut reconnaître, en utilisant l'équation de Navier Stokes (annexe A) pour le bilan d'énergie cinétique  $\epsilon_c$  et la conservation de l'énergie pour le bilan d'énergie interne  $\epsilon_{int}$ , le courant associé. Il est de la forme :

$$\vec{j}_\epsilon(\vec{r}, t) = (\epsilon + P) \vec{v}(\vec{r}, t) - \kappa \overrightarrow{\text{grad}} T(\vec{r}, t) \quad (1.10)$$

Quant au tenseur des contraintes, il est de la forme (voir annexe A) :

$$\tau_{ij}(\vec{r}, t) = \delta_{ij}P(\vec{r}, t) - \eta \left( \frac{\partial v_i(\vec{r}, t)}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j(\vec{r}, t)}{\partial r_i} \right) - \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \text{div } \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (1.11)$$

avec  $\eta$  la viscosité de cisaillement et  $\zeta$  la seconde viscosité (ou viscosité volumique). A l'équilibre :  $\vec{j}_\varepsilon = (\varepsilon + P)\vec{v}$  et  $\tau_{ij} = \delta_{ij}P$ . Les équations 1.6 à 1.11 constituent une description complète d'un fluide normal c'est-à-dire non superfluide. Ce sont des équations linéarisées. Cela signifie que, normalement, des termes faisant intervenir la vitesse au carré devraient apparaître. Cependant comme nous allons nous placer dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, ils ne sont pas nécessaires. Notons également que dans la suite on considérera un milieu infini, afin d'éliminer les problèmes de conditions aux limites.

En utilisant les équations 1.7 et 1.11, on écrit la loi de conservation de l'impulsion :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle + \overrightarrow{\text{grad}} P(\vec{r}, t) - \frac{\eta}{mn} \Delta \langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle - \frac{\zeta + \frac{2}{3}\eta}{mn} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \langle \vec{p}(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad (1.12)$$

Cette équation se sépare en deux parties en décomposant l'impulsion en une partie transverse et une partie longitudinale :  $\vec{p}(\vec{r}, t) = \vec{p}_t(\vec{r}, t) + \vec{p}_l(\vec{r}, t)$ . Ainsi, par définition, nous aurons :  $\text{div } \vec{p}_t(\vec{r}, t) = 0$  et  $\vec{\text{rot}} \vec{p}_l(\vec{r}, t) = \vec{0}$ . On obtient donc deux équations :

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p}_t(\vec{r}, t) \rangle - \frac{\eta}{mn} \Delta \langle \vec{p}_t(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{p}_l(\vec{r}, t) \rangle + \overrightarrow{\text{grad}} P(\vec{r}, t) - \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{mn} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \langle \vec{p}_l(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad (1.14)$$

En prenant la divergence de l'équation 1.14 et avec l'équation de continuité 1.6, on obtient :

$$\left( -m \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{n} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \right) \langle n(\vec{r}, t) \rangle + \Delta P(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.15)$$

Les équations 1.8 et 1.10 donnent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \langle \varepsilon(\vec{r}, t) \rangle - \frac{\varepsilon + P}{n} \langle n(\vec{r}, t) \rangle \right) - \kappa \Delta T(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.16)$$

L'équation 1.13 est l'équation de diffusion pour la quantité de mouvement transverse et les équations 1.15 et 1.16 sont les équations couplées de la diffusion longitudinale (la quantité de mouvement longitudinale est reliée à la densité de particules par :  $\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) + \text{div} \frac{\vec{p}_l(\vec{r}, t)}{m} = 0$ ).

Pour analyser ces équations, on définit  $\vec{p}_t(\vec{k}, z)$  la transformée de Fourier dans l'espace et de Laplace dans le temps de  $\vec{p}_t(\vec{r}, t)$  en supposant que  $\vec{p}_t(\vec{r}, t)$  s'annule à l'infini :

$$\vec{p}_t(\vec{k}, z) = \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \int_0^\infty dt e^{izt} \langle \vec{p}_t(\vec{r}, t) \rangle, \text{ Im } z > 0.$$

Appliquons cette transformation à l'équation pour l'impulsion transverse 1.13 :

$$\left( -iz + \frac{\eta}{mn} \vec{k}^2 \right) \vec{p}_t(\vec{k}, z) - \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \langle \vec{p}_t(\vec{r}, t=0) \rangle = 0$$

soit la solution :  $\vec{p}_t(\vec{k}, z) = \frac{imn\vec{v}_t(\vec{k})}{z + \frac{i\eta}{mn} \vec{k}^2}$  (1.17)

Le pôle en  $z = -\frac{i\eta}{mn}\vec{k}^2$  caractérise le processus de diffusion. En effet, en revenant dans l'espace  $t$ , on obtient facilement que :  $\vec{p}_t(\vec{k}, t) = e^{-t/\tau(k)}\vec{p}_t(\vec{k}, 0)$ . Le temps de vie s'écrit  $\tau(k) = \frac{mn}{\eta\vec{k}^2}$ , et on peut remarquer que dans le régime hydrodynamique, c'est-à-dire pour  $|\vec{k}|$  petit, il tend vers l'infini. De la même manière, les équations 1.15 et 1.16 se transforment en :

$$imz(-iz + D_l\vec{k}^2)n(\vec{k}, z) - \vec{k}^2 P(\vec{k}, z) = -m(-iz + D_l\vec{k}^2)n(\vec{k}) \quad (1.18)$$

$$-iz[\varepsilon(\vec{k}, z) - \frac{\varepsilon + P}{n}n(\vec{k}, z)] + \kappa \vec{k}^2 T(\vec{k}, z) = \varepsilon(\vec{k}) - \frac{\varepsilon + P}{n}n(\vec{k}) \quad (1.19)$$

$$\text{avec } D_l = \frac{\zeta + 4\eta/3}{mn} \quad \text{le coefficient de diffusion longitudinale.}$$

Dans les équations précédentes, on voit naturellement apparaître la quantité  $\varepsilon(\vec{k}, z) - \frac{\varepsilon + P}{n}n(\vec{k}, z)$ . Elle peut s'interpréter comme la densité de chaleur et nous la noterons  $q(\vec{k}, z)$ . En effet, la relation  $dE = d(\varepsilon V) = \varepsilon dV + V d\varepsilon = T dS - P dV$ , combinée à la conservation du nombre de particules qui impose  $dV = -V \frac{dn}{n}$ , donne :  $\frac{T}{V} dS = -\varepsilon \frac{dn}{n} + d\varepsilon - P \frac{dn}{n} = dq$ .  $q$  est donc bien  $T$  fois la "densité" d'entropie soit la densité de chaleur.

Le système étant à l'équilibre thermodynamique local, on peut utiliser les relations de la thermodynamique d'équilibre :

$$T(\vec{k}, z) = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s n(\vec{k}, z) + \frac{V}{T} \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_n q(\vec{k}, z)$$

$$P(\vec{k}, z) = \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_s n(\vec{k}, z) + \frac{V}{T} \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_n q(\vec{k}, z)$$

Pour les variables caractérisant l'état initial, on va utiliser au contraire, au lieu de  $T$  et  $P$ , les variables :

$$n(\vec{k}) = \left. \frac{\partial n}{\partial P} \right|_T P(\vec{k}) + \left. \frac{\partial n}{\partial T} \right|_P T(\vec{k})$$

$$q(\vec{k}) = \frac{T}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T P(\vec{k}) + \frac{T}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P T(\vec{k})$$

Les équations 1.18 et 1.19 peuvent se mettre sous une forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} im(-iz + D_l\vec{k}^2) - \vec{k}^2 \left. \frac{\partial P}{\partial n} \right|_s & -\vec{k}^2 \frac{V}{T} \left. \frac{\partial P}{\partial S} \right|_n \\ \kappa \vec{k}^2 \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_s & -iz + \kappa \vec{k}^2 \frac{V}{T} \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(\vec{k}, z) \\ q(\vec{k}, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -m(-iz + D_l\vec{k}^2) \left. \frac{\partial n}{\partial P} \right|_T & -m(-iz + D_l\vec{k}^2) \left. \frac{\partial n}{\partial T} \right|_P \\ \frac{T}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial P} \right|_T & \frac{T}{V} \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(\vec{k}) \\ T(\vec{k}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.20)$$



La résolution de ce système nécessite l'inversion de la matrice du membre de gauche et donc de rechercher les pôles, solutions de :

$$\left[ izm(-iz + D_l k^2) - k^2 \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_S \right] \left( -iz + \kappa k^2 \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial S} \Big|_n \right) + k^2 \frac{V}{T} \frac{\partial T}{\partial S} \Big|_n \kappa k^2 \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_S = 0$$

Nous sommes dans le régime hydrodynamique, régime dans lequel  $k$  est petit. Il est donc tout à fait légitime de chercher des solutions du type  $z = \alpha + \beta k + \gamma k^2$ .

On trouve :

$$\begin{aligned} z_0 &= -iD_T k^2 \\ z_{\pm} &= \pm v_s k - \frac{i}{2} \Gamma k^2 \end{aligned}$$

où on a posé  $\Gamma = D_l + D_T(\frac{c_p}{c_v} - 1)$  avec  $D_T = \kappa/mnc_p$ ,  $mnc_p = \frac{T}{V} \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_P$ ,  $mnc_v = \frac{T}{V} \frac{\partial S}{\partial T} \Big|_n$  et  $mv_s = \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_S$ , où  $v_s$  est la vitesse du son dans le milieu,  $c_p$  et  $c_v$  les chaleurs spécifiques. La relation de dispersion associée au pôle  $z_0$  correspond à un mode de diffusion thermique (pic de Rayleigh). En effet, une relation de dispersion quadratique en  $k$  est typique d'une propagation par diffusion. Par contre, les pôles  $z_{\pm}$  sont associés à deux modes sonores<sup>1</sup> (pics de Brillouin), pour lesquels il y a une propagation aux vitesses  $\pm v_s$  (via le terme  $v_s k$ ), et une diffusion via le coefficient  $\Gamma$ . Cette diffusion, à la fois de chaleur et de quantité de mouvement, est responsable de l'atténuation du son.

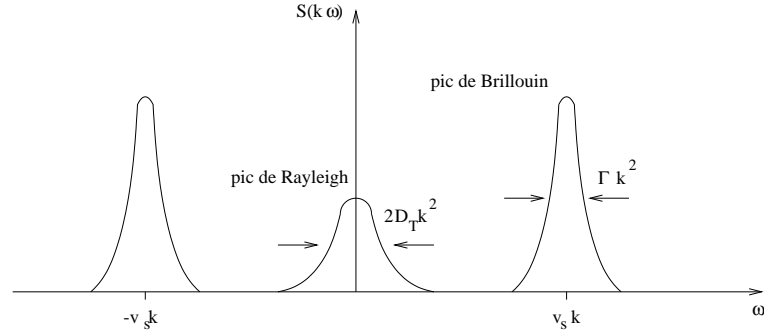


FIG. 1.2: Spectre de la lumière diffusée par un fluide ;  $S(k, \omega)$  est le facteur de structure dynamique, c'est-à-dire la fonction spectrale des fluctuations de densité.

Cette analyse théorique se trouve confortée par les expériences de diffusion de la lumière sur des fluides au repos. Il est en effet possible de retrouver l'interprétation des pôles car le spectre de diffusion obtenu est composé de trois pics, le pic de Rayleigh de largeur  $2D_T k^2$ , centré en zéro, et deux pics de Brillouin de largeur  $\Gamma k^2$ , et situés en  $\pm v_s k$ . De plus, l'expérience nous montre que la largeur de ces pics est faible devant l'espacement entre deux pics (voir figure 1.2). Dans ces conditions, pour résoudre l'équation matricielle 1.20, on supposera  $D_T k^2 \ll v_s k$  [3]. Il est également possible de mettre en évidence expérimentalement le phénomène d'opalescence critique que l'on obtient facilement à partir des équations : dans ce cas le pic central devient beaucoup plus important que les deux autres, regroupant ainsi quasiment toute l'intensité diffusée.

<sup>1</sup>Qualitativement, les pics de Brillouin correspondent à la diffusion de la lumière par des fluctuations spontanées de pression qui se propagent dans le fluide comme une onde acoustique. Le pic de Rayleigh est lui créé par la modulation spatiale de la température qui induit une variation de l'indice [1].

## 1.5 Formules de Kubo

Nous avons donc établi des équations hydrodynamiques pour les quantités conservées. Il faut maintenant établir des équations pour ces mêmes quantités conservées en fonction de la réponse du système à une perturbation. Nous allons donc maintenant utiliser une description en termes de fonctions de corrélation, c'est-à-dire évaluer des fonctions de réponse.

Afin de placer le système dans une situation légèrement hors équilibre de telle sorte que les variations dans l'espace et dans le temps soient faibles, on va considérer un hamiltonien d'interaction qui perturbe le système tout en garantissant l'équilibre local [4] :

$$\delta\mathcal{H}(t) = - \int d^3\vec{r} \left[ \frac{\delta P(\vec{r})}{n} n(\vec{r}, t) + \frac{\delta T(\vec{r})}{T} q(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{p}(\vec{r}, t) \right] e^{\varepsilon t} \theta(-t)$$

$e^{\varepsilon t} \theta(-t)$  signifie que l'on branche progressivement l'interaction et qu'on la coupe à  $t = 0$ . La variation de la valeur moyenne d'une grandeur  $A_i$  peut s'écrire (voir Annexe B) :

$$\begin{aligned} \delta\langle A_i(\vec{r}, t) \rangle &= i \int_{-\infty}^t dt' \theta(-t') \int d\vec{r}' e^{\varepsilon t'} \left\{ \langle [A_i(\vec{r}, t), n(\vec{r}', t')] \rangle_{eq} \frac{\delta P(\vec{r}')}{n} \right. \\ &\quad \left. + \langle [A_i(\vec{r}, t), q(\vec{r}', t')] \rangle_{eq} \frac{\delta T(\vec{r}')}{T} + \langle [A_i(\vec{r}, t), \vec{p}(\vec{r}', t')] \rangle_{eq} \vec{v}(\vec{r}') \right\} \end{aligned}$$

où  $A_i(\vec{r}, t)$  est un opérateur qui peut être  $n(\vec{r}, t)$ ,  $q(\vec{r}, t)$  ou  $\vec{p}(\vec{r}, t)$ . Et par ailleurs :

$$\delta\langle A_i(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\partial A_i}{\partial P} \delta P(\vec{r}) + \frac{\partial A_i}{\partial T} \delta T(\vec{r}) + \frac{\partial A_i}{\partial \vec{v}} \vec{v}(\vec{r}) \quad (1.21)$$

La fonction réponse est quant à elle définie par :

$$\chi''_{A_i A_j}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{1}{2} \langle [A_i(\vec{r}, t), A_j(\vec{r}', t')] \rangle_{eq}$$

ou de façon équivalente :

$$\langle [A_i(\vec{r}, t), A_j(\vec{r}', t')] \rangle_{eq} = \int \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')} \chi''_{A_i A_j}(\vec{k}, \omega)$$

Cela permet d'exprimer  $\delta\langle A_i \rangle$ , et donc  $A_i(\vec{k}, z)$  en fonction des différents  $\chi''$  :

$$\begin{aligned} A_i(\vec{k}, z) &= i \int_0^\infty dt e^{izt} \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \int_{-\infty}^t dt' \theta(-t') \int d\vec{r}' e^{\varepsilon t'} \int \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3} \\ &\quad \times e^{i\vec{k}' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t - t')} \left\{ \chi''_{A_i n}(\vec{k}', \omega) \frac{\delta P(\vec{r}')}{n} + \chi''_{A_i q}(\vec{k}', \omega) \frac{\delta T(\vec{r}')}{T} + \chi''_{A_i \vec{p}}(\vec{k}', \omega) \vec{v}(\vec{r}') \right\} \\ &= i \int_0^\infty dt e^{izt} \int_{-\infty}^t dt' \theta(-t') e^{\varepsilon t'} \int \frac{d\omega}{\pi} e^{-i\omega(t - t')} \\ &\quad \times \left\{ \chi''_{A_i n}(\vec{k}, \omega) \frac{P(\vec{k})}{n} + \chi''_{A_i q}(\vec{k}, \omega) \frac{T(\vec{k})}{T} + \chi''_{A_i \vec{p}}(\vec{k}, \omega) \vec{v}(\vec{k}) \right\} \end{aligned}$$

cela donne alors :

– pour  $t < 0$  :

$$\begin{aligned} A_i(\vec{k}) &= i \int \frac{d\omega}{\pi} \int_{-\infty}^t dt' e^{\varepsilon t' - i\omega(t - t')} \left\{ \chi''_{A_i n}(\vec{k}, \omega) \frac{P(\vec{k})}{n} + \chi''_{A_i q}(\vec{k}, \omega) \frac{T(\vec{k})}{T} + \chi''_{A_i \vec{p}}(\vec{k}, \omega) \vec{v}(\vec{k}) \right\} \\ &= \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{e^{\varepsilon t}}{\omega - i\varepsilon} \left\{ \chi''_{A_i n}(\vec{k}, \omega) \frac{P(\vec{k})}{n} + \chi''_{A_i q}(\vec{k}, \omega) \frac{T(\vec{k})}{T} + \chi''_{A_i \vec{p}}(\vec{k}, \omega) \vec{v}(\vec{k}) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

– pour  $t > 0$  :

$$A_i(\vec{k}, z) = \int \frac{d\omega}{i\pi} \frac{1}{\omega - z} \frac{1}{\omega - i\varepsilon} \left\{ \chi''_{A_{in}}(\vec{k}, \omega) \frac{P(\vec{k})}{n} + \chi''_{A_{iq}}(\vec{k}, \omega) \frac{T(\vec{k})}{T} + \chi''_{A_{ip}}(\vec{k}, \omega) \vec{v}(\vec{k}) \right\} \quad (1.23)$$

Examinons le cas particulier  $A_i(\vec{k}) = mn \vec{v}(\vec{k})$ , qui va nous permettre de calculer  $\eta$ .

Les équations 1.21 et 1.22 nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial mn \vec{v}(\vec{k})}{\partial \vec{v}} &= \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_{pp}(\vec{k}, \omega)}{\omega} \\ mn \delta_{ij} &= \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_{p_i p_j}(\vec{k}, \omega)}{\omega} \end{aligned}$$

Si l'on décompose alors  $\chi''_{p_i p_j}$  en une partie longitudinale, et une partie transverse :

$$\chi''_{p_i p_j}(\vec{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \chi''_{\ell}(k, \omega) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \chi''_t(k, \omega)$$

On obtient la relation (règle de somme) suivante :  $\int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_t(k, \omega)}{\omega} = mn$ .

Par suite, les équations 1.17 et 1.23 donnent par identification :

$$\frac{imnv_t(\vec{k})}{z + \frac{i\eta k^2}{mn}} = \int \frac{d\omega}{i\pi} \frac{\chi''_t(k, \omega)}{\omega'(\omega' - z)} v_t(\vec{k})$$

La dernière étape consiste à poser  $z = \omega + i\varepsilon$  ( $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ), et à prendre les parties imaginaires :

$$\frac{\eta k^2}{\omega^2 + \left( \frac{\eta k^2}{mn} \right)^2} = \int \frac{d\omega}{\pi} \frac{\chi''_t(k, \omega)}{\omega'} \pi \delta(\omega - \omega')$$

soit  $\chi''_t(k, \omega) = \frac{\omega \eta k^2}{\omega^2 + \left( \frac{\eta k^2}{mn} \right)^2}$ .

Cette équation permet d'obtenir, en prenant les limites  $k$  et  $\omega \rightarrow 0$ , une relation dite de Kubo :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k^2} \chi''_t(k, \omega) = \eta \quad (1.24)$$

On procède de la même manière pour évaluer les fonctions  $\chi''_{nn}(k, \omega)$  et  $\chi''_{qq}(k, \omega)$ . On arrive à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{m^2 \omega^3}{k^4} \chi''_{nn}(k, \omega) = \frac{4\eta}{3} + \zeta \quad (1.25)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k^2} \chi''_{qq}(k, \omega) = \kappa T \quad (1.26)$$

Ces relations expriment les coefficients de transport en fonction de la réponse  $\chi''$  à basse fréquence et grande longueur d'onde. Le théorème fluctuation-dissipation permet de plus d'exprimer ces réponses en terme d'un anti-commutateur. Par exemple, pour  $\chi''_{nn}$ , on obtient :

$$\chi''_{nn}(k, \omega) = \frac{\omega \beta}{4} \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \langle \{n(\vec{r}, t), n(\vec{0}, 0)\} \rangle_{eq}$$

Par ailleurs, les lois de conservation relient  $n$  au tenseur  $\tau$  de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} \frac{p_i}{m} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\tau_{il}}{m}$$

et ainsi l'équation 1.25 peut s'écrire, après intégration par parties :

$$\frac{4}{3}\eta + \zeta = \frac{\beta}{4} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \sum_{ijlm} \frac{k_l k_m}{k^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \langle \{\tau_{il}, \tau_{jm}\} \rangle. \quad (1.27)$$

Enfin, en effectuant des contractions sur les parties transverses et longitudinales et en utilisant la relation  $\langle \{\tau_{il}, \tau_{jm}\} \rangle = \frac{1}{10}(\delta_{ij}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \frac{2}{3}\delta_{il}\delta_{jm}) \sum_{ab} \langle \{\tau_{ab}, \tau^{ab}\} \rangle$ , on obtient la formule finale pour la viscosité de cisaillement :

$$\eta = \frac{\beta}{20} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \sum_{ab} \langle \pi_{ab}(x) \pi^{ab}(0) \rangle$$

où  $\pi$  est la partie de trace nulle du tenseur des contraintes :  $\pi_{ab} = \tau_{ab} - \frac{1}{3}\delta_{ab}\tau_l^l$ .

Le traitement de la dissipation par les fluctuations hydrodynamiques permet donc d'exprimer les coefficients de transport, introduits tout d'abord de manière phénoménologique, par les fonctions de corrélations des variables hydrodynamiques. C'est cette formule de la viscosité présentée ci-dessus que nous allons utiliser dans les chapitres suivants afin d'obtenir des valeurs numériques à partir de considérations microscopiques pour l'interaction pion-pion.

Nous avons également vu que les modes hydrodynamiques sont obtenus en linéarisant autour de l'équilibre les équations de conservation. Les perturbations sont caractérisées par un vecteur d'onde  $\vec{k}$ . La fréquence des modes hydrodynamiques renseigne sur la nature, propagative ou diffusive, du mode. La partie réelle de cette fréquence est égale à l'inverse du temps de relaxation : on retrouve le résultat général  $\tau_R \propto k^{-2}$  (cf 1.2). A l'ordre  $k^2$ , on obtient deux modes propagatifs amortis et trois modes non propagatifs, purement dissipatifs. Les deux modes propagatifs amortis sont les modes sonores :  $w = \pm ick - \Gamma k^2$ , avec  $c$  vitesse du son et  $\Gamma$ , constante d'atténuation. Ils sont dus à l'effet combiné des oscillations de pression et du transport de quantité de mouvement selon  $\vec{k}$ . Les trois modes non propagatifs se décomposent quant à eux en deux modes visqueux :  $w = -\nu k^2$ , avec  $\nu$  la viscosité cinématique, et un mode thermique :  $w = -\kappa k^2$ , avec  $\kappa$  la diffusivité thermique du milieu. Les deux modes visqueux ont leur origine dans la diffusion de quantité de mouvement dans les directions transverses à  $\vec{k}$ . Le mode thermique est lui dû à la diffusion de chaleur.

Dans le chapitre suivant nous allons voir qu'il existe d'autres quantités, c'est-à-dire autres que les grandeurs conservées, qui possèdent cependant les même propriétés au niveau de l'hydrodynamique, c'est-à-dire qui relaxent très lentement dans la limite basse fréquence, grande longueur d'onde. L'origine physique d'un tel comportement est alors évidemment totalement différente.



# Chapitre 2

## Brisure de symétrie et modes de Goldstone

La théorie hydrodynamique décrite dans le chapitre précédent repose sur l'existence de grandeurs conservées. Nous allons voir maintenant que cette approche s'avère être insuffisante lorsque le système présente une brisure spontanée de symétrie.

### 2.1 Description du phénomène : le paramètre d'ordre

De manière générale, un système présente une brisure spontanée de symétrie lorsque son état fondamental possède une symétrie de degré inférieur à celui du hamiltonien associé et donc aux équations qui régissent son évolution. Le nombre de degrés de liberté du système est alors augmenté par rapport au cas où la brisure est absente.

Le traitement de la brisure spontanée de symétrie nécessite donc l'introduction d'un nouveau paramètre afin de décrire le nouvel état du système : le paramètre d'ordre. Ce paramètre d'ordre constitue une mesure de la brisure, il caractérise le degré d'ordre du système. L'évolution spatio-temporelle du paramètre d'ordre se fait sur des échelles analogues à celles des quantités conservées au voisinage de la transition de phase.

Suivant les situations, la nature du paramètre d'ordre peut varier. Ce peut être un scalaire, un nombre complexe (valeur moyenne de la fonction d'onde de la phase superfluide, pour la superfluidité ou du condensat pour la supraconductivité), un vecteur (aimantation moyenne pour un ferromagnétique) et même un tenseur (transition de phase smectique-nématique des cristaux liquides)...

Lors d'une transition de phase, certaines corrélations peuvent aboutir à une mise en ordre du système : une transition de phase peut être génératrice d'ordre. Dans le cas d'une brisure spontanée de symétrie continue, ceci a pour conséquence l'apparition de nouveaux modes collectifs dans le système : les modes de Goldstone.

### 2.2 Modes de Goldstone

Le théorème de Goldstone établit l'existence d'un ou plusieurs modes collectifs basse fréquence (modes mous), les modes de Goldstone, lorsque la symétrie du hamiltonien est brisée dans l'état fondamental. Cependant, il existe une restriction importante : la brisure spontanée doit être associée à une symétrie continue. Dans le cas d'une symétrie discrète, le théorème de Goldstone ne

s'applique pas et il n'apparaît pas de comportement collectif dû à la brisure au sein du système.

D'un point de vue physique, les modes de Goldstone sont des excitations immédiatement accessibles à très basse température, au dessus du fondamental. A température finie, on les observe sous forme de modes collectifs, cohérents et à grande durée de vie. En physique nucléaire ou en physique des particules on leur associe généralement des particules, les bosons de Goldstone, de masse nulle.

L'importance capitale des modes de Goldstone en hydrodynamique vient du fait que leur temps de relaxation a une forme analogue à ceux que l'on a pu observer pour les quantités conservées (cf. 1.2). Donc, même si, comme nous allons le voir, l'origine physique profonde d'un tel comportement est complètement différente, il n'en demeure pas moins qu'à la limite basse fréquence ( $\omega \rightarrow 0$ ) et grande longueur d'onde ( $\lambda \rightarrow +\infty$ ), le temps caractéristique d'un mode de Goldstone tend vers l'infini.

Afin de comprendre le processus physique à l'origine d'un tel comportement, nous allons considérer le cas du ferromagnétisme et donc de spins situés aux noeuds d'un réseau avec une force entre plus proches voisins favorisant l'alignement. Même si cette force agit sur des distances microscopiques, elle parvient, pour une température suffisamment faible, à créer une aimantation moyenne non nulle dans une direction. De manière plus précise, cela signifie que les spins sont orientés en moyenne dans une direction privilégiée. Mais quelle direction ? *A priori*, en l'absence de champ extérieur et si l'on suppose que le réseau n'exerce aucune influence sur l'orientation des spins, cette direction est totalement arbitraire et quelconque. Cela signifie que cela ne coûte absolument aucune énergie de faire tourner, globalement, le système. Et cela signifie par conséquent que cela ne coûte quasiment rien de faire apparaître une fluctuation sinusoïdale transverse de grande longueur d'onde comme indiquée sur la figure 2.1 (on a choisi la direction  $z$  comme direction privilégiée). Le problème est maintenant de savoir comment et en combien de temps cette fluctuation va disparaître. Dans la région  $R_1$  les spins sont quasiment alignés entre eux. Pas dans la direction  $z$  - mais qu'importe - puisque toutes les directions sont équivalentes du point de vue des interactions microscopiques. Il n'y a donc dans cette région aucune force capable de faire revenir le système dans son état d'équilibre, c'est-à-dire de faire revenir les spins dans la direction  $z$ . En fait, la seule raison qui fait que l'aimantation dans la direction  $y$  va finalement disparaître est que, une demi-longueur d'onde plus loin, la direction d'alignement est différente (région  $R_2$ ). Les spins devront donc, quoiqu'il arrive, tourner pour finalement atteindre l'état d'équilibre global. En ce sens, le processus permettant le retour à l'équilibre nécessite le transport, sur une distance de l'ordre de  $\lambda/2$  de "l'information sur la direction locale d'alignement des spins". Évidemment, d'une part, ceci n'est possible que grâce aux corrélations à longue portée et, d'autre part, le temps nécessaire au transport de l'information devient infini dans la limite  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Donc, lorsque l'on considère les effets de brisure spontanée de symétrie continue dans le traitement d'un système, le bilan général des modes hydrodynamiques doit inclure non seulement ceux qui sont associés à des grandeurs conservées (cf. 1.2) mais également, comme on vient de le souligner, ceux qui sont associés à la brisure spontanée de symétrie elle-même du fait de l'existence de corrélations à longue portée. Plus précisément le nombre de modes hydrodynamiques est égal à la somme du nombre de quantités conservées et du nombre de modes de Goldstone issus de la brisure spontanée. Cependant, il est important de remarquer que nous n'avons fait que dénombrer les modes hydrodynamiques en donnant leur origine physique. Les arguments fournis ne nous permettent en aucun cas de prédire la nature de ces modes (convectif ou diffusif). Afin d'accéder à cette information, une étude plus précise des équations est indispensable.

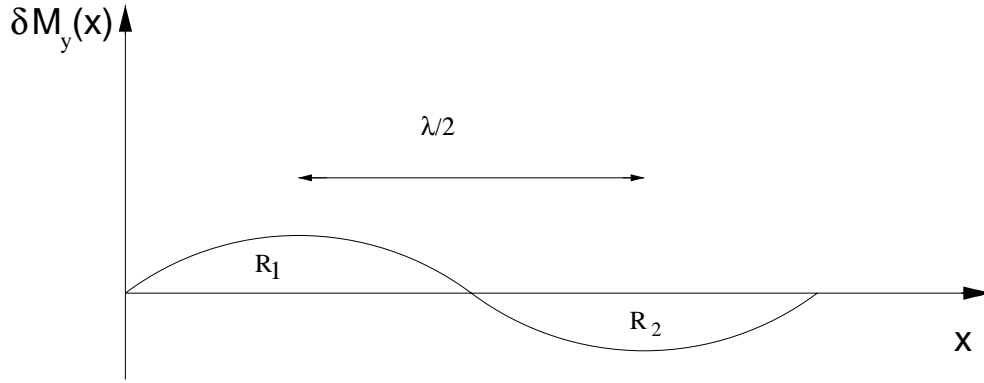


FIG. 2.1: Représentation d'une fluctuation d'orientation du paramètre d'ordre  $M$  sur la longueur caractéristique  $\lambda$ .

## 2.3 Exemple du superfluide

Nous allons voir maintenant un exemple de description hydrodynamique d'un système présentant une brisure de symétrie : l' $\text{He}^4$  superfluide. À la température  $T_\lambda = 2,18\text{K}$ , l'hélium liquide (pouvant être macroscopiquement décrit par les équations du fluide normal) subit une transition de phase vers un état possédant plusieurs propriétés remarquables dont la superfluidité. Cette propriété se manifeste par exemple par l'écoulement du fluide, à travers des fentes très fines, sans viscosité. L'origine de ces propriétés provient de la nature quantique du fluide à des températures aussi basses. L'étude de la superfluidité peut être abordée de façon microscopique [3, 6], mais il existe néanmoins une théorie hydrodynamique macroscopique rendant compte des propriétés de l'hélium : le modèle phénoménologique des deux fluides [5, 40].

Ce modèle considère que le superfluide est constitué en réalité de deux fluides, l'un ayant un comportement "normal", c'est-à-dire visqueux, et l'autre ayant un comportement superfluide. Il faut noter que les deux fluides n'échangent pas d'impulsion comme le feraient deux fluides ordinaires : le superfluide s'écoule à travers le fluide normal sans frottements. Pour chacun de ces fluides on définit une densité et une vitesse d'écoulement,  $n_n$  et  $\vec{v}_n$  pour la partie normale,  $n_s$  et  $\vec{v}_s$  pour la partie superfluide. En réalité ces deux fluides ne sont pas "physiquement" distincts mais tout se passe comme s'ils l'étaient. La densité totale du fluide est donnée par la somme des densités  $n = n_n + n_s$  et l'impulsion totale  $\vec{p} = n_n \vec{v}_n + n_s \vec{v}_s$  représente le flux de densité (invariance de Galilée). Ces deux quantités sont reliées par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{p} = 0. \quad (2.1)$$

La conservation de l'impulsion quant à elle s'écrit :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (P \delta_{ij} + n_n v_{ni} v_{nj} + n_s v_{si} v_{sj}) = 0. \quad (2.2)$$

Pour plus de simplicité nous avons laissé de côté la dissipation pour le moment. Il reste enfin à déterminer l'équation de conservation de l'entropie. Une autre propriété du mouvement superfluide est que celui-ci ne s'accompagne d'aucun transport d'entropie :

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (s \vec{v}_n) = 0. \quad (2.3)$$



Au-delà de ces équations calquées sur celles du fluide normal, il faut également tenir du phénomène de superfluidité dans l'hydrodynamique. En effet, le passage fluide normal-superfluide à la température critique s'accompagne d'une brisure de symétrie. Plus précisément le paramètre d'ordre de la transition de phase est la valeur moyenne dans l'état fondamental de l'opérateur de champ  $\langle \psi \rangle = \psi_0 e^{i\phi}$ . Le fait que  $\langle \psi \rangle \neq 0$  peut être considéré comme la définition du superfluide dans le même sens que l'aimantation est différente de zéro pour la phase ferromagnétique. En ce qui concerne le magnétisme toujours, la transition para-ferro s'accompagne de la brisure de la symétrie par rotation. Pour la superfluidité, la symétrie brisée est la symétrie  $U(1)$  associée au nombre de particules. La brisure de cette symétrie étant par ailleurs étroitement liée au phénomène de condensation de Bose, le module  $\psi_0$  est directement proportionnel au nombre de particules condensées. Du point de vue de l'hydrodynamique, si l'on se situe loin de la transition de phase,  $\psi_0$  peut être ignoré. Par contre la phase  $\phi$  constitue un ingrédient essentiel : il est en effet possible de montrer que  $(\hbar/m)\vec{\nabla}\phi$  n'est rien d'autre que la vitesse superfluide  $\vec{v}_s$ . L'incorporation de la brisure de symétrie dans les équations hydrodynamiques va donc se faire *via* cette vitesse superfluide. Par ailleurs, pour conforter ce qui a été dit dans la première partie sur le lien entre brisure de symétrie, paramètre d'ordre et corrélations à longue portée, il est possible en étudiant de manière détaillée les fonctions de corrélation qu'une petite variation de phase en un endroit du système va influencer la phase en un autre endroit éloigné : la phase est cohérente à longue distance.

L'équation hydrodynamique prenant en compte les nouvelles variables hydrodynamiques (en l'absence de dissipation) est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{v}_s^2}{2} + \mu = 0. \quad (2.4)$$

Des considérations sur la conservation de l'énergie et l'invariance de Galilée permettent d'identifier la quantité scalaire  $\mu$  avec le potentiel chimique [5].

La description du superfluide nécessite donc six variables au lieu de cinq pour le fluide normal. Il y a donc six modes hydrodynamiques. La nature (propagative ou diffusive) de chaque mode doit être déterminée par l'analyse des fluctuations hydrodynamiques [3]. Le mode supplémentaire par rapport au fluide normal est le second son, processus propagatif associé à des ondes de température, tandis que le "premier son" est associé à des ondes de pression. En réalité il s'agit d'une paire de modes ( $z = \pm c_2 k$ ), c'est-à-dire que le mode de transport de la température qui est un mode diffusif pour le fluide normal a changé de nature et est maintenant propagatif. Ce mode s'observe expérimentalement, en refroidissant l'hélium en ébullition (à la température de 4,2 K) par pompage de l'hélium gazeux. La formation de bulles lors du passage du liquide au gaz est une conséquence du transport diffusif de la chaleur, processus lent qui crée des surchauffes locales. Lorsque l'on atteint la température de transition superfluide, les bulles disparaissent, le mécanisme du second son étant évidemment plus efficace pour transporter la chaleur par les ondes de températures.

Si l'on regarde maintenant la dissipation, en ajoutant des termes dans les flux d'impulsion, d'énergie et de vitesse superfluide, on met en évidence deux viscosités volumiques supplémentaires, à l'ordre dominant [40]. Ces coefficients de transport peuvent également être calculés grâce aux fonctions de corrélation [3] :

$$\zeta_1 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k^2} \chi''_{p_i v_s}(k, \omega), \quad (2.5)$$

$$\zeta_3 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k^2} \chi''_{v_s v_s}(k, \omega), \quad (2.6)$$

et  $\zeta_2$ , la seconde viscosité déjà présente dans le fluide normal, est donnée par les corrélations  $\chi''_{p_i p_i}$  (équation 1.25).

# Chapitre 3

## Hydrodynamique relativiste

Dans les chapitres précédents, nous nous sommes placés dans le cadre de la cinématique classique. Or, en hydrodynamique, on est amené à tenir compte des effets relativistes lorsque le mouvement global du fluide est comparable à la vitesse de la lumière ou bien seulement lorsque les particules de fluide se déplacent à très grande vitesse. Nous allons voir dans ce chapitre comment tout ce que nous avons vu se généralise au cas relativiste.

### 3.1 Fluide parfait relativiste

Dans le domaine relativiste, il n'y a plus conservation de la densité particulaire car les énergies mises en jeu peuvent donner lieu à l'annihilation et à la création de particules. Néanmoins, il y a conservation de charges comme par exemple la charge baryonique, le nombre leptonique, l'étrangeté, etc.

Pour un fluide parfait (normal et non dissipatif), on a toujours cinq quantités conservées, dont les densités associées sont  $s$ , densité d'entropie,  $T^{0i}$ , densité de quantité de mouvement en notation relativiste ( $T^{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion), ainsi que  $n$ , densité de charge (baryonique dans le cas du fluide nucléaire). Rappelons ici les équations de conservation (système d'équations 1.6 à 1.9) à la limite non relativiste :

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial x^i}(nv^i) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{0i} + \frac{\partial}{\partial x^j}T^{ij} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}s + \frac{\partial}{\partial x^i}(sv^i) = 0. \quad (3.3)$$

La dernière équation est équivalente à la conservation de la densité d'énergie  $T^{00}$ , en l'absence de dissipation ;  $T^{ij}$  est le flux de quantité de mouvement. La relation d'égalité entre le flux de particules et la densité d'impulsion (1.9) est une contrainte due à l'invariance de Galilée. Dans le cadre de la relativité restreinte, cette invariance fait place à l'invariance de Lorentz, la densité d'impulsion étant maintenant identifiée avec le flux d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t}T^{00} + \frac{\partial}{\partial x^i}T^{0i} = 0. \quad (3.4)$$

La mise sous forme covariante des équations hydrodynamiques aboutit à :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.5)$$

$$\partial_\mu (n_0 u^\mu) = 0. \quad (3.6)$$

$u^\mu$  est le quadrivecteur vitesse du fluide, vérifiant  $u_\mu u^\mu = c^2 = 1$  et  $T^{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion. La forme de ce tenseur est obtenue à partir des relations thermodynamiques :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}.$$

$\rho$  est la densité d'énergie dans le référentiel au repos,  $p$  la pression et  $n_0 = n/\gamma$ . La conservation de l'entropie est, quant à elle, obtenue par projection de l'équation de conservation du  $T^{\mu\nu}$  selon la direction du quadrivecteur  $u^\nu$  et en utilisant toutes les équations hydrodynamiques et thermodynamiques du système [5] :

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (s_0 u^\mu) = 0, \quad (3.7)$$

avec  $s_0 = s/\gamma$ .

## 3.2 Dissipation et formules de Kubo relativistes

Les équations relativistes de la mécanique des fluides en présence de processus dissipatifs s'établissent en déterminant la forme des termes supplémentaires dans le tenseur énergie-impulsion et le vecteur "matière". Soient  $\tau^{\mu\nu}$  et  $\nu_\mu$  ces termes rendant compte de la dissipation ; on écrit cette fois-ci :

$$\partial_\mu [(\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}] = 0, \quad (3.8)$$

$$\partial_\mu (n_0 u^\mu + \nu_\mu) = 0. \quad (3.9)$$

L'entropie n'est plus conservée et on peut déduire des équations hydrodynamiques ainsi que des relations thermodynamiques un terme de production d'entropie qui, d'après le deuxième principe, doit être positif. Il existe d'autres contraintes sur ces termes supplémentaires liées au choix de la définition de la vitesse  $u^\mu$ . En effet, en relativité on ne peut plus définir la vitesse d'après le flux de masse puisqu'il est lié au flux d'énergie. Le choix de Landau [5] impose que dans le référentiel au repos ( $u^0 = 1, u^i = 0$ ) les densités d'énergie et d'impulsion soient données par les mêmes formules qu'en l'absence de dissipation ( $\tau_{00}, \tau_{0i} = 0$ ) et que la composante temporelle du flux de particules coïncide avec la densité de particules  $n_0$  ( $\nu_0 = 0$ ), d'où les relations (valables dans tout référentiel) :

$$u^\mu \tau_{\mu\nu} = 0, \quad (3.10)$$

$$u^\mu \nu_\mu = 0.$$

La "non-conservation" de l'entropie s'exprime ainsi :

$$u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu (s_0 u^\mu - \frac{\mu_0}{T_0} \nu^\mu) = -\nu^\mu \partial_\mu \frac{\mu_0}{T_0} + \frac{\tau_{\mu\nu}}{T_0} \partial_\mu u_\nu \quad (3.11)$$

où  $T_0 = \gamma T$ ,  $\mu_0 = \gamma \mu$ , température et potentiel chimique relativistes tel que  $\rho + p = T_0 s_0 + \mu_0 n_0$ . L'étape suivante consiste à exprimer les flux dissipatifs comme des combinaisons linéaires des

forces (gradients). Ces expressions doivent garantir la production d'entropie positive, satisfaire les relations 3.11 et la nature (tenseur symétrique et vecteur de Lorentz) de ces flux :

$$\nu^\mu = \kappa(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\nu \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right), \quad (3.12)$$

$$\tau^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \left[ \left( \zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \partial_\lambda u^\lambda \right] + \eta \left[ (g^{\mu\lambda} - u^\mu u^\lambda) \partial_\lambda u^\nu + (g^{\lambda\nu} - u^\lambda u^\nu) \partial_\lambda u^\mu \right]. \quad (3.13)$$

L'expression du second membre de l'équation 3.11 est donc une forme quadratique dans les forces, et les coefficients de transport sont proportionnels à ceux que l'on retrouve à la limite non relativiste (dans les expressions 1.6 à 1.11) :  $\kappa$  pour la diffusivité thermique,  $\zeta$  pour la viscosité volumique et  $\eta$  pour la viscosité de cisaillement. A la limite non relativiste, la partie spatiale du tenseur  $T^{\mu\nu}$  s'identifie au flux d'impulsion.

Les formules de Kubo sont généralisables au cas relativiste. Il est également possible de démontrer ces formules en partant directement de l'hydrodynamique relativiste [37], ou avec le formalisme de l'opérateur statistique hors équilibre [35] qui donne des formules identiques. Par exemple, la viscosité de cisaillement va donc pouvoir être calculée avec la fonction de corrélation de la partie spatiale et sans trace du tenseur énergie-impulsion :

$$\eta = \frac{\beta}{20} \lim_{p^0 \rightarrow 0} \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{0}} \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle \pi_{ij}(x) \pi^{ij}(0) \rangle \quad (3.14)$$

avec  $\pi^{ij} = T^{ij} - \frac{1}{3} T_k^k \delta^{ij}$ . Le tenseur énergie-impulsion peut être calculé par un modèle de théorie des champs [36], c'est que nous utiliserons dans la troisième partie.

### 3.3 Le superfluide relativiste

Les équations hydrodynamiques du superfluide diffèrent de celles du fluide parfait par la présence d'une nouvelle variable, la phase du condensat pour laquelle il y a une équation qui peut être mise sous forme covariante :

$$u^\mu \partial_\mu \phi = -\mu_0 \quad (3.15)$$

avec  $\mu_0 = \gamma\mu$  le potentiel chimique relativiste ( $\gamma$ , facteur de Lorentz), défini à la limite non relativiste par  $\mu = \mu_{Landau} + v_s^2/2 - \vec{v}_n \cdot \vec{v}_s$  (notations du paragraphe 2.3) et  $u^\mu = \gamma(1, \vec{v}_n)$  la quadrivitesse "normale". Le traitement relativiste des autres équations (sans dissipation) aboutit à [7, 39, 40] :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{avec} \quad T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + V^2 \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \quad (3.16)$$

$$\partial_\mu (n_0 u^\mu - V^2 \partial^\mu \phi) = 0 \quad (3.17)$$

où  $V^2$  est la densité superfluide à la limite non relativiste et  $n_0 = (n + V^2 \partial^0 \phi)/\gamma$ . La nouvelle variable hydrodynamique  $\phi$  est reliée au potentiel chimique mais est aussi présente dans l'équation de conservation du nombre de particules et du tenseur énergie-impulsion. On reconnaît les deux termes densité normale/vitesse normale et densité superfluide/"vitesse superfluide"  $\partial_\mu \phi$ . Ces termes rendent compte explicitement de la brisure de symétrie  $U(1)$  du superfluide relativiste.

Par ailleurs, comme il s'agit des équations pour le cas non dissipatif, on peut retrouver l'équation de conservation de l'entropie 3.7 avec ces équations et en utilisant la différentielle de la pression  $dp = s_0 dT_0 + n_0 d\mu_0 + V^2 d(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi/2)$ .

Le modèle du superfluide relativiste peut par exemple être utilisé pour l'interprétation théorique du comportement des étoiles à neutrons. Dans notre étude, il sert de guide au traitement hydrodynamique de la symétrie chirale  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ .

## Deuxième partie

# Hydrodynamique de la matière nucléaire



# Chapitre 4

## Matière nucléaire et brisure de symétrie chirale

La première partie a été consacrée à la description générale des notions et outils qui seront utilisés dans la suite. Il s'agit de l'hydrodynamique relativiste avec brisure de symétrie que nous allons appliquer à la symétrie chirale dans cette partie et des formules de Kubo permettant le calcul des coefficients de transport que nous utiliserons dans la troisième partie. Dans ce chapitre, nous allons décrire les équations hydrodynamiques pour un fluide chirale en prenant en compte les modes de Goldstone.

### 4.1 Rappels sur la symétrie chirale

La chromodynamique quantique (QCD) est une théorie de jauge basée sur le groupe  $SU(3)$ , introduite pour décrire l'interaction (force forte) entre les quarks, composants fermioniques fondamentaux de la matière. Il existe donc huit bosons, les gluons, (correspondant aux générateurs du groupe  $SU(3)$ ) qui véhiculent la force forte. Le comportement de QCD à haute énergie est bien connu. On montre par les techniques de renormalisation que la constante de couplage effective est faible et on peut appliquer un développement perturbatif. Cette propriété, dite de liberté asymptotique (les quarks et les gluons interagissent faiblement), permet de considérer le problème comme une théorie des champs en interaction avec des champs libres à l'infini pour laquelle toutes les techniques perturbatives usuelles sont valables. À basse énergie, on estime que le potentiel effectif est confinant (on ne forme que des états liés singlets de couleurs), bien que ce problème crucial de la QCD ne soit pas résolu. Les états liés sont nécessairement dans la représentation identité dite "sans couleur" ou "blanche" de  $SU(3)$  (on a des singlets de couleur). On forme soit des baryons (trois quarks; ce sont des fermions) soit des mésons (combinaisons quark-antiquark; ce sont des bosons). Baryons et mésons forment la famille des hadrons. Pour la physique de la matière hadronique, c'est-à-dire à basse énergie ou à basse température, seules les excitations thermiques associées aux particules les plus légères ont une contribution. C'est pourquoi on peut décrire la matière hadronique à densité baryonique nulle comme un gaz de mésons  $\pi$  ou pions (mésons composés des deux quarks les plus légers,  $u$  et  $d$ ).

La densité lagrangienne de la chromodynamique quantique (QCD) prend en compte des champs de quarks avec six saveurs et trois couleurs et des champs de gluons avec huit états de couleur. En pratique, pour la symétrie chirale, la partie de  $\mathcal{L}_{QCD}$  se rapportant aux gluons n'est pas nécessaire car invariante séparément [11, 12]. Si l'on se limite de plus au secteur des quarks légers  $u$  et  $d$ , la



densité lagrangienne devient alors :

$$\mathcal{L}_{QCD} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{m_u+m_d}{2}\bar{\psi}\psi + \frac{m_u-m_d}{2}\bar{\psi}\tau_3\psi \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix}$$

où  $m_u$ ,  $m_d$ ,  $\psi_u$  et  $\psi_d$  sont les masses et champs des quarks  $u$  et  $d$ , rassemblés dans l'isospineur  $\psi$ , vérifiant  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ .

Pour introduire la notion de symétrie chirale, nous allons maintenant envisager deux types de transformation : vectorielle et axiale.

#### 4.1.1 Symétries vectorielles et axiales

On considère tout d'abord la transformation vectorielle de  $SU(2)$  :  $\psi \rightarrow e^{i\alpha_k\frac{\tau_k}{2}}\psi$ , avec  $\alpha_k$ , paramètre continu et  $\tau_k$  matrice de Pauli ( $k = 1, 2, 3$ ). Cette transformation ne correspond pas de manière rigoureuse à une symétrie de  $\mathcal{L}_{QCD}$  : il existe une "petite" violation (d'isospin) due au terme comportant  $\frac{m_d-m_u}{2} \simeq 2\text{MeV} \ll M_H \approx 1\text{ GeV}$ , ordre de grandeur des masses hadroniques. Cette violation étant très petite, on supposera cette symétrie réalisée dans la suite ( $m_u = m_d$ ). Grâce au théorème de Noether, on accède alors au quadricourant  $\mathcal{V}_k^\mu$  (vecteur vrai) et à la charge associée  $Q_k$  :

$$\mathcal{V}_k^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\frac{\tau_k}{2}\psi \quad Q_k = \int d\mathbf{r}\psi^\dagger\frac{\tau_k}{2}\psi \quad (4.1)$$

Comme la symétrie est supposée exacte, on a  $[I_k, H] = 0$  et  $Q_k$  s'identifie à l'isospin  $I_k$ . Or, comme  $I_k$  vérifie  $I_k|0\rangle = 0$ , on a une symétrie de type Wigner et le spectre hadronique est donc agencé en multiplets d'isospin.

Considérons maintenant la transformation axiale de  $SU(2)$  :  $\psi \rightarrow e^{i\alpha_k\frac{\tau_k}{2}\gamma^5}\psi$  avec  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , les matrices  $\gamma^\mu$  vérifiant l'algèbre de Clifford. Le théorème de Noether permet à nouveau d'accéder au quadricourant  $\mathcal{A}_k^\mu$  (pseudo-vecteur) et à la charge associée  $Q_k^5$ .

$$\mathcal{A}_k^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\frac{\tau_k}{2}\psi \quad Q_k^5 = \int d\mathbf{r}\psi^\dagger\gamma^5\frac{\tau_k}{2}\psi \quad (4.2)$$

La condition sur la réalisation de la symétrie est plus restrictive. En effet, il faut que  $m_u = m_d = 0$ . Ceci est en contradiction avec la masse (de courant) moyenne des quarks légers  $m = \frac{m_u+m_d}{2} \simeq 8\text{ MeV} \neq 0$ . En effet, expérimentalement la symétrie axiale n'est pas vérifiée. Il est donc nécessaire en toute rigueur de prendre en compte cette brisure explicite de symétrie. Mais cependant, comme  $m \ll M_H$ , on ne considérera dans la suite que le cas de la brisure spontanée.

#### 4.1.2 La symétrie chirale et sa brisure spontanée

Les champs chiraux gauche et droit sont par définition :  $\psi_L = \frac{1-\gamma^5}{2}\psi$  et  $\psi_R = \frac{1+\gamma^5}{2}\psi$ . La notion de chiralité coïncide avec la notion d'hélicité pour les particules de masse nulle. On envisage une transformation chirale  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ , agissant indépendamment sur les champs  $\psi_L$  et  $\psi_R$ . Sous  $SU(2)_L$ , les lois de transformation des spineurs sont :  $\psi_L \rightarrow e^{i\alpha_k\frac{\tau_k}{2}}\psi_L$  et  $\psi_R \rightarrow \psi_R$ . Sous  $SU(2)_R$  :  $\psi_R \rightarrow e^{i\beta_k\frac{\tau_k}{2}}\psi_R$  et  $\psi_L \rightarrow \psi_L$ . Les charges gauches et droites, formant deux algèbres fermées séparées, sont donc :

$$Q_L^k = \int d\mathbf{r}\psi_L^\dagger\frac{\tau_k}{2}\psi_L = \frac{1}{2}(Q_k - Q_k^5) \quad Q_R^k = \int d\mathbf{r}\psi_R^\dagger\frac{\tau_k}{2}\psi_R = \frac{1}{2}(Q_k + Q_k^5) \quad (4.3)$$

Ces charges chirales,  $Q_L$  et  $Q_R$ , sont les générateurs des transformations. On peut de même définir les quadricourants chiraux droit et gauche.

Dans le secteur des quarks légers et à la limite où  $m = 0$ ,  $\mathcal{L}_{QCD}$  est rigoureusement invariant sous cette symétrie. Cela signifie que  $[Q_L^k, H] = [Q_R^k, H] = 0$  et que donc les charges sont rigoureusement conservées. Par contre, pour  $m \neq 0$ , la petite brisure de symétrie axiale implique une petite brisure de symétrie chirale. Les charges sont donc “presque” conservées. *A priori*, on a donc un doublement des multiplets : à chaque particule, correspond un partenaire chirale de parité opposée et de masse “presque” égale. Ceci n’est pas observé dans la réalité, car, contrairement à  $Q_k = I_k$ ,  $Q_k^5$  ne vérifie pas la symétrie à la Wigner :  $Q_k^5|0\rangle \neq 0$ . Le vide n’est pas invariant sous l’action de  $Q_k^5$ . La symétrie axiale, vérifiée au niveau du hamiltonien ( $[Q_k^5, H] = 0$ ), n’est pas apparente dans l’état fondamental, donc au niveau du spectre des particules, même si cet état possède la même énergie que le vide ( $[Q_k^5, H] = 0$ ).

Cette symétrie spontanément brisée est de type Goldstone : il y a donc existence de modes mous. Les bosons de Goldstone associés à cette brisure sont des pions de masse nulle  $m_\pi = 0$ . Si on considère la brisure explicite de symétrie chirale, due à la présence de termes dans le hamiltonien qui brisent explicitement la symétrie, alors la masse des pions, bien que petite par rapport à l’échelle hadronique, n’est plus nulle. En effet, dans la réalité :  $m_\pi \simeq 140$  MeV. Le paramètre d’ordre mesurant la brisure spontanée de symétrie chirale est  $f_\pi \simeq 93$  MeV, la constante de désintégration du pion.

Il faut enfin noter que dans notre cas, c’est-à-dire dans le cadre d’une description hydrodynamique, les quantités manipulées sont des grandeurs moyennées car on se place à une échelle mésoscopique. À cette échelle, on peut alors définir des densités de charge gauche et droite  $\rho_L$  et  $\rho_R$ .

Après ces rappels sur la symétrie chirale, on peut à présent se pencher sur le thème central de cette partie, à savoir le traitement hydrodynamique de la brisure spontanée de symétrie chirale dans la matière hadronique.

## 4.2 Modèle hydrodynamique global

Pour le moment, les phénomènes dissipatifs seront négligés. On considérera donc le cas de la brisure spontanée de symétrie chirale dans un fluide parfait relativiste.

Le but de cette section est de rappeler la démarche suivie dans [8]<sup>1</sup> (les principaux résultats sont rappelés dans [9]), afin de déterminer les équations hydrodynamiques qui régissent la brisure spontanée de symétrie chirale dans la matière nucléaire. Pour ce faire, on utilise une méthode générale, particulièrement bien adaptée au cas des brisures de symétrie, et qui peut donc être utilisée par exemple pour accéder au système d’équations hydrodynamiques associé au superfluide relativiste (paragraphe 3.3) [7], mais également pour le fluide parfait. Les grandes lignes de la méthode sont les suivantes : dans un premier temps, on identifie les variables hydrodynamiques et on détermine les crochets de Poisson entre ces variables. On écrit ensuite le hamiltonien le plus général, compatible avec les symétries du problème. En utilisant ce hamiltonien et les crochets de Poisson on peut alors trouver les équations hydrodynamiques du système. On impose enfin l’invariance de Lorentz (le flux d’énergie est égal à la densité de moment) pour pouvoir réécrire sous forme covariante les équations.

---

<sup>1</sup> Je tiens à exprimer ici mes profonds remerciements à Dam Thanh Son pour les nombreux échanges électroniques et téléphoniques que nous avons eus à ce sujet.

### 4.2.1 Variables hydrodynamiques, crochets de Poisson et hamiltonien du système

Le nombre de degrés de liberté hydrodynamiques, quatorze au total, est divisé en deux catégories. La première rassemble les onze variables hydrodynamiques du fluide chiral associées aux densités des grandeurs conservées, que sont : la densité d'entropie  $s$ , la densité de moment  $T^{0i}$ , la densité de nombre baryonique  $n$ , les densités de charge droite et gauche, écrites sous la forme de matrices de  $SU(2)$ ,  $\rho_L \equiv \rho_L^i \tau_i / 2$  et  $\rho_R \equiv \rho_R^i \tau_i / 2$ .

La deuxième catégorie de variables est, quant à elle, constituée par les modes de Goldstone associés à la brisure spontanée. Dans le cas de la symétrie chirale, ces modes sont les pions, au nombre de trois ( $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  en coordonnées cartésiennes). Ces modes peuvent donc être représentés par une matrice de  $SU(2)$  (3 degrés de liberté car trois générateurs infinitésimaux) :  $\Sigma \equiv e^{i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} / f_\pi}$ , appelée par abus de langage phase du condensat chiral car  $\Sigma$  constitue la généralisation de la phase du condensat superfluide  $\phi$  ( $\phi$  appartenant à  $U(1)$ ) dans  $SU(2)$ .

La démarche suivie est fondée sur la mécanique analytique [10]. Elle permet le passage de l'espace de Hilbert à l'espace des phases où l'algèbre des crochets de Poisson remplace l'algèbre de Lie des commutateurs. Les opérateurs de première quantification redeviennent des quantités classiques. Les non commutations ne sont alors plus de nature quantique mais de nature matricielle (l'algèbre de  $SU(2)$  est non abélienne). Si l'on regarde ainsi par exemple les crochets de Poisson spécifiques de la symétrie chirale, on constate que les composantes de  $\rho_L$  et  $\rho_R$  forment, à l'instar de leurs homologues quantiques (4.3), deux algèbres isomorphes, complémentaires ( $\epsilon^{abc}$  est le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita) :

$$\begin{aligned} \{\rho_L^a(\vec{x}), \rho_L^b(\vec{y})\} &= -\epsilon^{abc} \rho_L^c(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\rho_R^a(\vec{x}), \rho_R^b(\vec{y})\} &= -\epsilon^{abc} \rho_R^c(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\rho_L^a(\vec{x}), \rho_R^b(\vec{y})\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les densités de charge  $\rho_L$  et  $\rho_R$  sont les générateurs des rotations chirales à l'échelle mésoscopique ; leurs crochets de Poisson avec  $\Sigma$  ne s'annulent pas :

$$\begin{aligned} \{\rho_L^a(\vec{x}), \Sigma(\vec{y})\} &= -\frac{i}{2} \tau^a \Sigma(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), & \{\rho_L^a(\vec{x}), \Sigma^\dagger(\vec{y})\} &= \frac{i}{2} \Sigma^\dagger(\vec{x}) \tau^a \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\rho_R^a(\vec{x}), \Sigma(\vec{y})\} &= \frac{i}{2} \Sigma(\vec{x}) \tau^a \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), & \{\rho_R^a(\vec{x}), \Sigma^\dagger(\vec{y})\} &= -\frac{i}{2} \tau^a \Sigma^\dagger(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

De même, les crochets de Poisson de la densité de moment  $T^{0i}$  avec  $\rho_L$ ,  $\rho_R$  et  $\Sigma$  sont non nuls :

$$\begin{aligned} \{T^{0i}(\vec{x}), \Sigma(\vec{y})\} &= -\partial_i \Sigma(\vec{x}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{T^{0i}(\vec{x}), \rho_{L,R}(\vec{y})\} &= \rho_{L,R}(\vec{x}) \partial_i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le hamiltonien pour décrire le système est de la forme générale :

$$H = \int d^3x T^{00} (s, n, T^{0i}, \rho_L^a, \rho_R^a, \Sigma, \Sigma^\dagger, \partial_i \Sigma, \partial_i \Sigma^\dagger). \quad (4.7)$$

La densité volumique d'énergie  $T^{00}$  est une fonction des quatorze degrés de liberté hydrodynamiques et des dérivées partielles de  $\Sigma$ , au premier ordre car, par hypothèse,  $\Sigma$  est une fonction lente des variables spatiales. Ceci justifie la dépendance par rapport à  $\Sigma$  et à ses dérivées spatiales premières  $\partial_i \Sigma$  uniquement, les ordres supérieurs étant négligés. La différentielle de la densité

d'énergie s'écrit, avec  $T$ ,  $\mu$ ,  $v^i$ ,  $\mu_L$ ,  $\mu_R$ ,  $\sigma$  et  $\gamma_i$ , variables conjuguées, au sens thermodynamique du terme :

$$dT^{00} = Tds + \mu dn + v^i dT^{0i} + \text{Tr} \left[ \mu_L d\rho_L + \mu_R d\rho_R + \sigma^\dagger d\Sigma + d\Sigma^\dagger \sigma + \gamma_i^\dagger d\partial_i \Sigma + d\partial_i \Sigma^\dagger \gamma_i \right]. \quad (4.8)$$

À l'intérieur d'une trace, les éléments sont invariants par permutation circulaire, l'ordre n'a donc pas d'importance, ce qui n'est pas le cas en l'absence de trace car les grandeurs manipulées sont des matrices de  $SU(2)$ . Par une transformation de Legendre, on accède ainsi à la pression et à sa différentielle associée :

$$p = Ts + \mu n + v^i T^{0i} + \text{Tr} [\mu_L \rho_L + \mu_R \rho_R] - T^{00} \quad (4.9)$$

$$dp = s dT + n d\mu + T^{0i} dv^i + \text{Tr} [\rho_L d\mu_L + \rho_R d\mu_R - \sigma^\dagger d\Sigma - d\Sigma^\dagger \sigma - \gamma_i^\dagger d\partial_i \Sigma - d\partial_i \Sigma^\dagger \gamma_i]. \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Équations du mouvement - invariance - développement d'ordre quadratique

Afin de déterminer les équations hydrodynamiques du système, on utilise les relations (4.11), où  $H$  est le hamiltonien du système et  $F(a, b, c, \dots)$  une fonction de plusieurs variables hydrodynamiques  $a, b, \dots$  [10] :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \{H, a\} \quad \{F(a, b, c, \dots), a\} = \frac{\partial F}{\partial b} \{b, a\} + \frac{\partial F}{\partial c} \{c, a\} + \dots \quad (4.11)$$

A l'aide de l'expression des différents crochets de Poisson de la section précédente, on peut alors accéder aux équations hydrodynamiques du système :

$$\begin{aligned} \partial_s n &= -\partial_i (s v^i) \\ \partial_t n &= -\partial_i (n v^i) \\ \partial_t \rho_L &= -\partial_i (\rho_L v^i) - \frac{i}{2} [\mu_L, \rho_L] + \frac{i}{2} \left[ \Sigma (\sigma^\dagger - \partial_i \gamma_i^\dagger) - (\sigma - \partial_i \gamma_i) \Sigma^\dagger \right] \\ \partial_t \rho_R &= -\partial_i (\rho_R v^i) - \frac{i}{2} [\mu_R, \rho_R] - \frac{i}{2} \left[ (\sigma^\dagger - \partial_i \gamma_i^\dagger) \Sigma - \Sigma^\dagger (\sigma - \partial_i \gamma_i) \right] \\ \partial_t \Sigma &= -v^i \partial_i \Sigma - \frac{i}{2} (\mu_L \Sigma - \Sigma \mu_R) \\ \partial_t T^{0k} &= -\partial_i T^{ik} \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec  $T^{ik} = v^i T^{0k} + p \delta^{ik} + \text{Tr} \left[ \gamma_i^\dagger \partial_k \Sigma + \partial_k \Sigma^\dagger \gamma_i \right]$ .

L'invariance relativiste est ensuite imposée par l'égalité entre le flux d'énergie et la densité de moment ( $\partial_t T^{00} = -\partial_i T^{0i}$ ). En utilisant les équations hydrodynamiques du système (4.12), on aboutit à la contrainte :

$$\begin{aligned} T^{0i} = \frac{\partial p}{\partial v^i} &= v^i (v^k T^{0k} + Ts + \mu n + \text{Tr} [\mu_L \rho_L + \mu_R \rho_R]) + \text{Tr} \left[ \gamma_i^\dagger v^k \partial_k \Sigma + v^k \partial_k \Sigma^\dagger \gamma_i \right] \\ &\quad + \frac{i}{2} \left[ (\mu_L \Sigma - \Sigma \mu_R) \gamma_i^\dagger - (\mu_L \Sigma^\dagger - \mu_R \Sigma^\dagger) \gamma_i \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Pour l'instant, aucune hypothèse sur la structure du hamiltonien n'a été faite, sauf au sujet de la lente variation spatiale de  $\Sigma$  (les dérivées partielles de  $\Sigma$ , au premier ordre sont donc petites).

On supposera désormais que les grandeurs  $\rho_L$ ,  $\rho_R$  sont aussi petites. Ceci est réaliste car pour une matière symétrique d'isospin à l'équilibre thermique,  $\rho_L$  et  $\rho_R$  sont nulles et  $\Sigma$  est constante.

Les hypothèses précédentes étant en accord avec une lente dépendance spatio-temporelle de  $\Sigma$ , on va donc pouvoir effectuer un développement en  $\Sigma$ .

De ce fait, en se limitant à une dépendance spatio-temporelle d'ordre quadratique en  $\Sigma$ , la densité d'énergie  $T^{00}$  peut être écrite comme :

$$T^{00} = \epsilon_0(s, n, T^{0i}) + \epsilon_1$$

avec  $\epsilon_0$ , densité d'énergie du fluide "normal" ( $\rho_L = \rho_R = 0$  et  $\Sigma = \text{constante}$ ) et  $\epsilon_1$ , correspondant à la somme des termes chiraux de plus bas ordre en  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = & f_{ij} \text{Tr} [\partial_i \Sigma \partial_j \Sigma^\dagger] + \frac{a}{2} \text{Tr} [(\rho_L - \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)^2] \\ & + \frac{a_v}{2} \text{Tr} [(\rho_L + \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)^2] - i c^k \text{Tr} [(\rho_L \Sigma \partial_k \Sigma^\dagger + \Sigma^\dagger \partial_k \Sigma \rho_R)] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les coefficients  $a$ ,  $a_v$ ,  $f_{ij}$  et  $c^k$  sont déterminés de la manière suivante. La différentielle de l'énergie (4.8) et la forme de  $\epsilon_1$  nous permettent d'exprimer les variables conjuguées  $\mu_L$ ,  $\mu_R$ ,  $\sigma$  et  $\gamma_i$  en fonction des coefficients et des variables  $\rho_L$ ,  $\rho_R$ ,  $\Sigma$  et  $\partial_i \Sigma$ . Une transformation de Legendre permet d'obtenir une expression explicite de la pression  $p = p_0 + p_1$  où  $p_0$  est la transformée de  $\epsilon_0$  et  $p_1$ , la transformée de  $\epsilon_1$ , est exprimée en fonction des variables conjuguées et des coefficients. En remplaçant la pression dans la condition d'invariance de Lorentz (4.13), on obtient un système d'équations soluble. Il en résulte que  $p_0$  est fonction de deux variables  $T_0 = \gamma T$  et  $\mu_0 = \gamma \mu$  et que les quatre coefficients peuvent être exprimés en fonction de la vitesse et de trois fonctions des variables  $T_0$  et  $\mu_0$  notées  $f_s$ ,  $f_t$  et  $f_v$ , qui, au même titre que  $p_0$ , pourraient être déterminées par la thermodynamique de QCD. On obtient finalement :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = & \frac{f_s^2}{4} (\delta_{ij} - \frac{1 - v_\pi^2}{1 - v_\pi^2 v^2} v^i v^j) \text{Tr} [\partial_i \Sigma \partial_j \Sigma^\dagger] + \frac{1}{\gamma^2 f_t^2 (1 - v_\pi^2 v^2)} \text{Tr} [(\rho_L - \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)^2] \\ & + \frac{1}{\gamma^2 f_v^2} \text{Tr} [(\rho_L + \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)^2] - i \frac{v_\pi^2}{\gamma^2 (1 - v_\pi^2 v^2)} v^k \text{Tr} [(\rho_L \Sigma \partial_k \Sigma^\dagger + \Sigma^\dagger \partial_k \Sigma \rho_R)] \end{aligned} \quad (4.15)$$

où  $v_\pi \equiv f_s/f_t$  est la vitesse du pion. En effet, les fonctions  $f_s$  et  $f_t$  peuvent être identifiées avec les constantes de désintégration spatiale et temporelle du pion. A température nulle :  $f_s = f_t$  et l'invariance de Lorentz est dans ce cas vérifiée au niveau microscopique. Au contraire, pour une température finie, on assiste alors à la brisure de l'invariance de Lorentz au niveau microscopique donc  $f_s \neq f_t$ . Donc, de manière générale, la présence d'un bain thermique brise l'invariance de Lorentz au niveau microscopique.

### 4.2.3 Système d'équations hydrodynamiques sous forme covariante

Pour réécrire sous forme covariante les équations du système, il est nécessaire d'utiliser des combinaisons linéaires des variables initiales :  $\rho_V = (\rho_L + \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)$ ,  $\rho_A = (\rho_L - \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger)$ ,  $\mu_V = (\mu_L + \Sigma \mu_R \Sigma^\dagger)$  et  $\mu_A = (\mu_L - \Sigma \mu_R \Sigma^\dagger)$ . Les équations d'évolution de  $\rho_L$ ,  $\rho_R$  et  $\Sigma$  permettent d'obtenir deux équations sous forme covariante, une pour  $\alpha = \rho_V/\gamma$  venant de la combinaison  $\rho_L + \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger$  et une autre du second ordre pour  $\Sigma$  venant de la combinaison  $\rho_L - \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger$  :

$$\partial_\mu (\alpha u^\mu) + \frac{1}{2} [u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \alpha] = 0,$$

$$i\partial_\mu((f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + [u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \alpha] = 0.$$

La mise sous forme covariante de la pression aboutit à :

$$p = p_0 + \frac{1}{4}(f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger] + \frac{1}{4}f_s^2 \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] + \frac{1}{16}f_v^2 \text{Tr} [\mu_{V0}^2] \quad (4.16)$$

avec  $\mu_{V0} = \gamma\mu_V$ . Il est maintenant possible d'écrire la densité de moment  $T^{0i}$  à l'aide de l'équation 4.13 et ainsi de mettre le tenseur énergie-impulsion sous forme covariante :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \frac{1}{4}f_s^2 \text{Tr} [\partial^\mu \Sigma \partial^\nu \Sigma^\dagger + \partial^\nu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger]. \quad (4.17)$$

La densité d'énergie dans le référentiel au repos, en posant  $\hat{K} = T_0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial \mu_0}$ , s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho = & (\hat{K} - 1)p_0 + \frac{1}{4}(\hat{K} + 1)(f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger] + (\hat{K} - 1)\frac{1}{4}f_s^2 \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] \\ & + (\hat{K} + 1)\frac{1}{16}f_v^2 \text{Tr} [(\mu_{V0})^2]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Pour le fluide parfait relativiste, on avait  $\rho = (\hat{K} - 1)p$ . Dans (4.17), on reconnaît dans le premier terme l'expression du  $T^{\mu\nu}$  du fluide parfait relativiste (cf 3.1), même si ici, des termes incluant la symétrie chirale sont présents dans les expressions de  $p$  et  $\rho$ . Par contre, le second terme du membre de droite est nouveau par rapport au cas idéal sans brisure et est donc tout à fait caractéristique de la présence d'une brisure spontanée de la symétrie chirale.

Comme les variables hydrodynamiques sont au nombre de quatorze, le système doit aussi être décrit par quatorze équations hydrodynamiques. Si on les regroupe, celles-ci sont :

$$\partial_\mu(n_0 u^\mu) = 0 \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.19)$$

$$\partial_\mu(\alpha u^\mu) + \frac{1}{2}[u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \alpha] = 0, \quad (4.20)$$

$$i\partial_\mu((f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + [u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \alpha] = 0. \quad (4.21)$$

On constate donc qu'aux cinq équations hydrodynamiques habituelles (4.19), viennent s'ajouter neuf équations relatives à la symétrie chirale. Ces neuf équations (trois dans (4.20) et six dans (4.21)), qui pourraient tout aussi bien être  $\partial_\mu J_L^\mu = 0$ ,  $\partial_\mu J_R^\mu = 0$  et l'équation du premier ordre vérifiée par  $\Sigma$ , sont en réalité contenues dans l'équation du premier ordre (4.20) et dans l'équation du second ordre (4.21). De ce système d'équations, on peut à nouveau vérifier la conservation de l'entropie. On obtient donc un système hydrodynamique fermé qui, en théorie, est soluble. Nous verrons cependant dans le prochain chapitre que l'application à un cas particulier concret nécessite des simplifications et donc des approximations.



# Chapitre 5

## Application aux collisions d'ions lourds

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la description hydrodynamique d'un gaz avec symétrie chirale brisée fait intervenir de nouvelles équations par rapport au fluide idéal. Or, les modèles couramment utilisés pour étudier les collisions d'ions lourds reposent sur l'hypothèse du fluide idéal. Dans ce chapitre, nous allons donc essayer de mettre en évidence les écarts dus à la prise en compte de la brisure de symétrie. Par ailleurs nous verrons également les effets dus à la prise en compte de la viscosité dans le cadre du fluide sans brisure. Cette étude se fait dans le cadre de la description de Bjorken des collisions et nous commençons donc par un rappel des hypothèses et résultats de cette description.

### 5.1 Rappels sur le modèle de Bjorken

#### 5.1.1 Collisions d'ions lourds ultrarelativistes

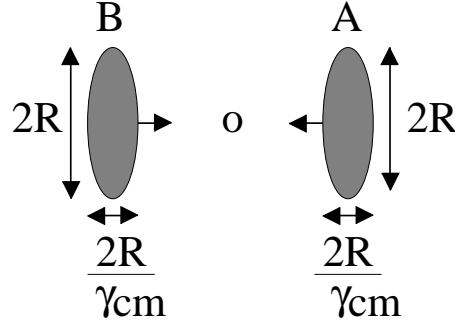
L'hydrodynamique relativiste est fréquemment utilisée pour décrire les collisions d'ions lourds, lorsque l'on veut reproduire l'évolution spatio-temporelle de la matière dense et chaude créée dans de tels événements. En faisant l'hypothèse de l'équilibre local, cette approche donne directement une description de ce qui se passe jusqu'au "freeze-out", en termes de température, pression, etc. On suppose également souvent que la matière produite est idéale, c'est-à-dire que l'on considère un fluide normal, non dissipatif. Des modèles simples ont été développés pour la description de la géométrie des collisions d'ions lourds ultrarelativistes, dont le modèle de Bjorken qui a le grand intérêt de fournir des solutions analytiques (cf. 5.1.3).

Pour simplifier, on peut considérer la collision de deux ions lourds ultrarelativistes identiques [13, 14]. Un des principaux effets est dû à la cinématique : il y a contraction des longueurs parallèles au mouvement (ici selon l'axe des  $z$ ) et dilatation des temps par rapport aux référentiels propres des ions. Dans ce cadre relativiste, il est judicieux d'abandonner la notion de vitesse au profit de la notion de rapidité  $y$ , que l'on peut définir à l'aide de deux variables comme par exemple  $E$ , l'énergie et  $P_z$ , l'impulsion selon l'axe  $z$  d'une particule ( $c=1$ ) :

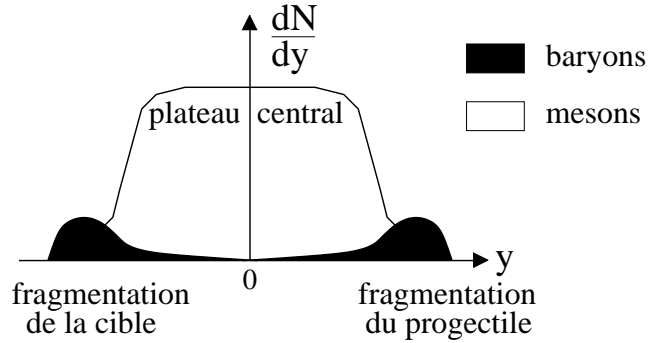
$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + P_z}{E - P_z} \right)$$

Les rapidités sont additives dans une transformation de Lorentz, comme les vitesses le sont dans une transformation de Galilée. De même, le temps est remplacé par le temps propre  $\tau = \frac{t}{\gamma}$ , temps dans le référentiel de repos d'une particule. En pratique, on mesure le nombre de particules  $N$



FIG. 5.1: Collision de deux ions lourds ultrarelativistes identiques  $A$  et  $B$ , dans le centre de masse.

produites par unité de rapidité  $\frac{dN}{dy}$ . Dans la région de rapidité entre le projectile et la cible des particules secondaires (mésons) sont créées, par exemple des pions ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ), des kaons ( $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K^0$ )... Par ailleurs, à partir de  $\tau \geq \tau_0 \simeq \frac{1fm}{c}$ , on suppose que le système atteint un état d'équilibre local, le traitement hydrodynamique de l'évolution du système devient alors valide. À très haute énergie ( $E_{CM} \geq 100A.GeV$ ) [15], avec  $A$  le nombre de nucléons, les mécanismes de production de particules et d'expansion hydrodynamique s'effectuent sur des échelles de temps différentes et donc sont bien séparés. Dans  $\frac{dN}{dy}$ , on peut alors identifier trois zones, une zone centrale et deux zones périphériques :

FIG. 5.2: Vision schématique de  $\frac{dN}{dy}$  dans une collision d'ions lourds à très haute énergie.

Les deux zones périphériques sont les zones de fragmentation de la cible et du projectile. Le nombre de baryons  $y$  est prédominant. La zone centrale ( $y \simeq 0$ ) est intéressante du point de vue théorique. En effet, on peut supposer que :

$$\left. \frac{dN}{dy} \right|_{A+A} \simeq cte \quad (5.1)$$

L'hypothèse de distribution de rapidité uniforme, lors des collisions  $A+A$  est basée sur l'extrapolation des résultats expérimentaux similaires  $p+p$ . De ce fait, les grandeurs caractérisant le système dépendent peu de la rapidité  $y$  dans la zone centrale. C'est pourquoi, ces mêmes grandeurs seront supposées, en général, indépendantes de  $y$  dans cette zone. La région centrale peut être décrite plus facilement que les autres régions. En effet, il y a, dans cette zone, formation d'un très grand nombre de mésons. Les pions se forment en premier car ils sont plus légers que les autres mésons :

ils représentent 90% du nombre total de mésons. De plus, contrairement aux mésons, les baryons sont très peu nombreux. Dans la suite les mésons autres que les pions seront négligés, ainsi que les baryons devant les pions, et les pions issus des résonnances. L'équation d'état de la région centrale devient alors plus simple. Les propriétés particulières de la zone centrale sont mises à profit dans le modèle de Bjorken.

### 5.1.2 Modèle proprement dit

Le modèle de Bjorken est un modèle hydrodynamique à  $(1 + 1)$  dimensions, valide à très haute énergie ( $E_{CM} \geq 100A \text{ GeV}$ ) [15, 16, 17]. Il est utilisé pour décrire les collisions centrales symétriques. Dans cette gamme d'énergie, les deux noyaux deviennent transparents l'un pour l'autre. On se place dans la région centrale. Seule l'expansion longitudinale est considérée lors de la collision. Le système est donc contenu dans un cylindre de rayon très grand. On peut négliger l'épaisseur longitudinale des noyaux. Ceci entraîne que les coordonnées longitudinales des nucléons d'un même noyau sont identiques. Avec ces hypothèses, la collision se schématise comme suit :

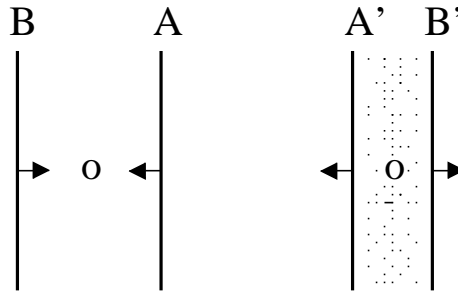


FIG. 5.3: Schéma d'une collision d'ions lourds ultrarelativistes,  $A$  et  $B$ , dans le modèle de Bjorken, avant et après collision.

Dans le modèle de Bjorken, les conditions initiales du fluide sont spécifiées sur une hyperbole de temps propre constant  $\tau_0$ . La coordonnée permettant de se repérer sur cette hyperbole est la rapidité  $y$ . Les particules issues de cette collision se déplacent avec des vitesses variées et se désintègrent avec un temps caractéristique  $\tau \geq \tau_0 = \frac{1fm}{c}$ . La cinématique relativiste implique que les fragments lents se désintègrent avant les fragments rapides. Si ces fragments sont assimilés à des particules libres, créées en  $(t, z) = (0, 0)$ , ils se désintègrent tous selon l'hyperbole de temps propre  $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$  ( $c=1$ ).

Par hypothèse, dans la zone centrale, on suppose que les propriétés du système ne dépendent pas de la rapidité le long de l'hyperbole  $\tau_0$ . Le système devient alors invariant sous l'action des boosts de Lorentz (ici selon la direction  $z$ ). Comme les équations hydrodynamiques sont aussi invariantes sous ces boosts, les propriétés du fluide en  $z$  se déduisent de celles en 0. Or, en  $z = 0$ , la vitesse du fluide est nulle, la quadrivitesse est donc :  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ . En  $z$ , cette dernière devient  $u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau} = (\frac{t}{\tau}, 0, 0, \frac{z}{\tau})$ , sous l'action du boost de Lorentz suivant  $z$ , de vitesse  $v = \frac{z}{\tau}$ .

Le comportement du système est visualisé à l'aide d'un diagramme d'espace-temps.

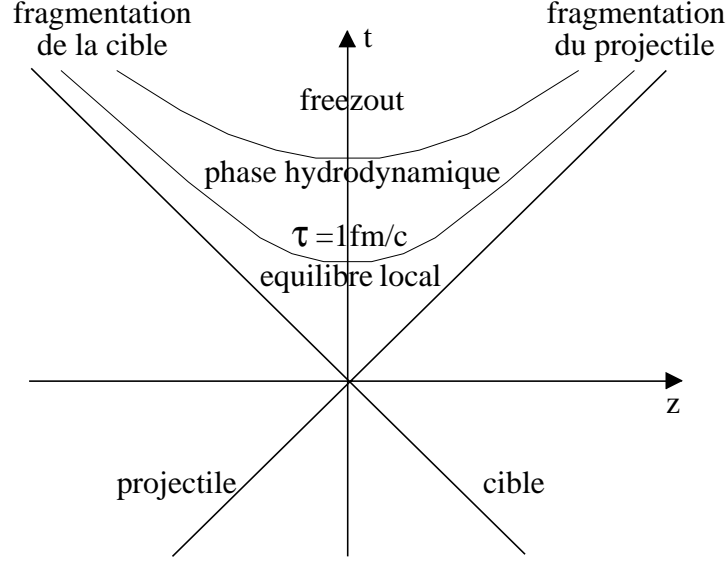


FIG. 5.4: Évolution dans l'espace-temps de la région centrale de rapidité dans le modèle de Bjorken : hyperboles paramétrées par le temps propre  $\tau$ .

Le diagramme d'espace-temps comporte différentes parties, délimitées par des hyperboles  $\tau = \text{cte}$ , à l'intérieur du cône de lumière [15] : pour  $\tau \leq \tau_0$ , il y a thermalisation du système jusqu'à obtention de l'équilibre local en  $\tau = \tau_0 \simeq \frac{1 \text{ fm}}{c}$ . Dans le cadre de ce modèle, la transition de phase du plasma de quarks-gluons, si elle existe, est incluse dans le processus de thermalisation. Pour  $\tau \geq \tau_0$ , la symétrie du modèle est réalisée : validité du régime hydrodynamique du gaz de pions. Ensuite, le gaz de pions évolue jusqu'à  $\tau_f$ , temps de "freeze-out", régime asymptotique correspondant à la libération des pions : ces derniers s'échappent du milieu dense et deviennent libres...

### 5.1.3 Principaux résultats du modèle

Il existe une correspondance biunivoque entre  $(t, z)$  et  $(\tau, y)$  :  $t(\tau, y) = \tau \cosh(y)$  et  $z(\tau, y) = \tau \sinh(y)$ . Ce changement de variables présente un grand intérêt car  $\tau$  et  $y$ , respectivement temps propre et rapidité, sont les variables pertinentes du problème. Les grandeurs caractérisant le système sont donc a priori des fonctions des deux variables  $\tau$  et  $y$ . Dans le modèle de Bjorken, par hypothèse, ces grandeurs sont indépendantes de la rapidité. Dans ce modèle à  $(1+1)$  dimensions, cette hypothèse est réaliste pour  $\tau \leq R/c \simeq 6 \text{ fm}/c$ , avec  $R$ , rayon des noyaux. Au-delà, un modèle à  $(3+1)$  dimensions est nécessaire [16]. Ces grandeurs sont donc des fonctions de la seule variable  $\tau$ . Le système est soluble analytiquement dans ce cas particulier. En se basant sur l'hydrodynamique relativiste du fluide normal (cf. 3.1) et la thermodynamique ( $dE = TdS - pdV$  car le nombre baryonique est nul, d'où une enthalpie volumique  $w = \epsilon + p = Ts$ ), on peut montrer que, dans la zone centrale, la densité d'énergie  $\epsilon$ , la pression  $p$ , la température  $T$ , la densité d'entropie  $s$  vérifient :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad s(\tau) = s(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{T}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(\tau) = T(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{4}{3} \frac{p}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\tau) = p(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{4}{3} \frac{\epsilon}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\tau) = \epsilon(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3}. \quad (5.5)$$

On accède ainsi à la dépendance en  $\tau$  de chacune de ces grandeurs. L'équation d'état du système est :

$$p = aT^4 = \frac{\epsilon}{3} \quad \text{avec} \quad a = g_\pi \frac{\pi^2}{90}. \quad (5.6)$$

Le gaz de pions étant assimilé à un gaz de Bose de masse nulle (i.e. ultrarelativiste), on retrouve une loi type loi de Stephan avec  $g_\pi = 3$ , dégénérescence due aux pions  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$  [15, 17]. Les conditions aux limites que nous utiliserons sont (toutes déduites à partir du choix de  $T(\tau_0)$ ), pour  $\tau_0 \simeq \frac{1fm}{c}$  :

$$\begin{aligned} s(\tau_0) &\simeq 1,4 fm^{-3} & T(\tau_0) &\simeq 200 MeV \\ p(\tau_0) &\simeq 70 MeV.fm^{-3} & \epsilon(\tau_0) &\simeq 210 MeV.fm^{-3} \end{aligned} \quad (5.7)$$

## 5.2 Équations hydrodynamiques simplifiées

Il s'agit maintenant d'inclure dans le traitement précédent, les termes provenant de la brisure spontanée de la symétrie chirale. Nous allons donc utiliser les équations hydrodynamiques du chapitre précédent en faisant toutefois quelques hypothèses simplificatrices.

### 5.2.1 Cas particulier où les baryons sont absents

Nous supposons dans un premier temps que le nombre de baryons est nul, ce qui se traduit par  $n_0 = 0$  et  $\alpha = 0^1$ . Cette hypothèse est plausible dans les collisions d'ions lourds relativistes. En effet, lors de ce type de collision, le nombre de baryons produits dans la zone centrale de rapidité est négligeable devant le nombre de mésons (cf. 5.1.1). Dans ce cas particulier, le système d'équations se réduit à :

$$p = p_0 + \frac{1}{4}(f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger] + \frac{1}{4}f_s^2 \text{Tr} [\partial_\mu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] \quad (5.8)$$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + \frac{1}{4}f_s^2 \text{Tr} [\partial^\mu \Sigma \partial^\nu \Sigma^\dagger + \partial^\nu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger] \quad (5.9)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.10)$$

$$i\partial_\mu ((f_t^2 - f_s^2)u^\mu u^\nu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) = 0. \quad (5.11)$$

### 5.2.2 Développement explicite en champ de pion

On effectue maintenant un développement limité de la phase  $\Sigma$  en puissances de  $\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$ , avec  $\vec{\tau}$  vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli et  $\vec{\pi}$  le champ de pion classique. On s'intéresse aux premiers ordres non nuls en  $\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$ .

$$\Sigma = \exp \left[ i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi} \right] \simeq 1 + i \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi} - \frac{1}{2} \left( \frac{\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{f_\pi} \right)^2 + o((\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^2) \quad (5.12)$$

Quand on effectue le développement limité au premier ordre en  $\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}$  des équations (5.8), (5.9) et (5.10), on retrouve le système d'équations associé au fluide normal relativiste sans brisure

---

<sup>1</sup>Dans les équations du chapitre précédent, en l'absence de pions ( $\Sigma = 1$ ),  $\alpha$  correspond à la charge isovectorielle.

spontanée de symétrie chirale, en l'absence de baryons (cf 3.1). En réalisant un développement limité au deuxième ordre en  $\vec{\tau}.\vec{\pi}$  des équations (5.8), (5.9) et (5.10) on trouve cette fois-ci :

$$p = p_0 + \frac{1}{4} \frac{(f_t^2 - f_s^2)}{f_\pi^2} u^\mu u^\nu \text{Tr} [\partial_\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) \partial_\nu(\vec{\tau}.\vec{\pi})] + \frac{1}{4} \frac{f_s^2}{f_\pi^2} \text{Tr} [\partial_\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) \partial^\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi})] \quad (5.13)$$

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{f_s^2}{f_\pi^2} \text{Tr} [\partial^\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) \partial^\nu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) + \partial^\nu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) \partial^\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi})] \quad (5.14)$$

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Dans ce cas de figure, afin de fermer le système d'équations, il faut aussi écrire l'équation correspondant à (5.11). Au deuxième ordre dans le développement en champ de pion de (5.11), on trouve :

$$\partial_\mu \left( \frac{(f_t^2 - f_s^2)}{f_\pi^2} u^\mu u^\nu \partial_\nu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) + \frac{f_s^2}{f_\pi^2} \partial^\mu(\vec{\tau}.\vec{\pi}) \right) = 0. \quad (5.16)$$

On vérifie la cohérence du développement limité à l'ordre deux en  $\vec{\tau}.\vec{\pi}$  en s'assurant de la conservation de l'entropie pour cet ordre. Maintenant que l'on a connaissance du système d'équations dans la limite des faibles perturbations chirales, on peut tenter de mettre en évidence les écarts par rapport au fluide normal relativiste en se plaçant dans la géométrie de Bjorken.

## 5.3 Brisure de symétrie chirale dans la géométrie de Bjorken

### 5.3.1 Développements au premier et deuxième ordre en $\vec{\tau}.\vec{\pi}$ - Zone centrale

Dans le cas général, on ne peut pas garder toutes les hypothèses du modèle de Bjorken. En effet, dans le hamiltonien, les termes se rapportant à la brisure de la symétrie chirale, symétrie interne, brisent aussi l'invariance par translation selon la direction du boost (ici  $z$ ). A priori, les grandeurs qui caractérisent le système sont donc des fonctions des deux variables  $\tau$  et  $y$ . Hors de la région centrale ( $y \neq 0$ ), la dépendance par rapport à la rapidité complique grandement le problème. Les termes dans le  $T^{\mu\nu}$  qui brisent la symétrie chirale (symétrie interne) brisent aussi la symétrie d'espace-temps. La dépendance par rapport à une seule variable n'est dans ce cas pas exacte et constitue juste une approximation. Dans la suite, afin de simplifier le problème, on se place donc dans la région centrale. Dans la zone centrale ( $y = 0$ ), on retrouve la symétrie de Bjorken, à savoir l'indépendance des variables par rapport à  $y$ . Comme dans le modèle de Bjorken, on supposera aussi que le nombre de baryons dans cette zone centrale est nul. Au premier ordre en  $\vec{\tau}.\vec{\pi}$ , les termes de brisure n'apparaissent pas, dans le  $T^{\mu\nu}$  et dans les équations d'évolution des grandeurs qui nous intéressent. On retrouve alors les équations du fluide parfait relativiste donc les résultats du modèle de Bjorken (cf. 5.1.3). Par contre, au deuxième ordre en  $\vec{\tau}.\vec{\pi}$ , des termes se rapportant à la brisure de symétrie chirale apparaissent. Le système d'équations n'est plus soluble analytiquement que pour la densité d'entropie. La contribution à l'entropie n'est pas uniquement due au fluide parfait, mais la prise en compte de la brisure de symétrie chirale ne modifie pas la forme de la dépendance en  $\tau$  de l'entropie. Ce n'est pas le cas des autres grandeurs, accessibles par l'intermédiaire d'équations couplées, qui constituent les généralisations des équations (5.3), (5.4) et (5.5) :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad s(\tau) = s(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau} \quad (5.17)$$

$$\left( \frac{s(\tau_0)\tau_0}{\tau} - 4aT^3 \right) \frac{\partial T}{\partial \tau} + \text{Tr} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{f_t^2}{4f_\pi^2} \left( \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{f_\pi^2} \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} \right)^2 \right] = 0 \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{Ts(\tau_0)\tau_0}{\tau^2} + \text{Tr} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{1}{2} \frac{f_s^2}{f_\pi^2} \left( \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{f_t^2}{f_\pi^2} \frac{1}{\tau} \left( \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} \right)^2 \right] = 0. \quad (5.19)$$

L'équation d'état n'est plus celle d'un gaz de Bose ultrarelativiste (5.6) et devient :

$$p = aT^4 + \frac{1}{4} \frac{f_t^2}{f_\pi^2} \text{Tr} \left[ \left( \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (5.20)$$

De plus, dans la géométrie de Bjorken, l'équation d'évolution du champ de pion (5.16) est :

$$\frac{f_t^2}{f_\pi^2} \frac{\partial^2 \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau^2} + \left[ \frac{1}{\tau} \frac{f_t^2}{f_\pi^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{f_t^2}{f_\pi^2} \right) \right] \frac{\partial \vec{\tau} \cdot \vec{\pi}}{\partial \tau} = 0. \quad (5.21)$$

Le système d'équations est fermé donc a priori soluble numériquement. En effet, avec la connaissance de la solution de (5.21), (5.17) permet de résoudre (5.18), qui à son tour permet d'accéder aux solutions des équations (5.19) et (5.20).

Cependant, dans le cas général, on ne connaît pas les formes analytiques de  $f_t$  et  $f_s$  en fonction de la température. En pratique, si on veut résoudre le système, on doit donc faire une hypothèse supplémentaire au sujet de ces fonctions. L'hypothèse choisie est :  $f_t = f_s = f_\pi$  (nous étudierons une autre hypothèse dans le paragraphe 5.3.3). En effet, à température finie ces fonctions n'ont aucune raison d'être égales (cf. 4.2.2) mais leur correction pour les basses températures sont en  $T^2$  [11]. Les corrections pour  $f_t^2 - f_s^2$  sont donc dans ce cas de figure en  $T^4$  ; l'hypothèse précédente semble donc justifiée pour les basses températures. En remarquant que  $\text{Tr}[(\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^2] = 2\vec{\pi}^2$ , avec  $\vec{\tau}$  vecteur dont les composantes sont les matrices de Pauli, le système se simplifie en :

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad s(\tau) = s(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau} \quad (5.22)$$

$$\left( \frac{s(\tau_0)\tau_0}{\tau} - 4aT^3 \right) \frac{\partial T}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2 = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{Ts(\tau_0)\tau_0}{\tau^2} + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2 = 0 \quad (5.24)$$

$$p = aT^4 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2 \quad (5.25)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{\tau} \right) \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} = 0. \quad (5.26)$$

Dans les équations précédentes,  $\pi^i$  représente la composante cartésienne  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) du champ de pion  $\vec{\pi}$ , ne dépendant par hypothèse que de  $\tau$  dans la zone centrale. Dans l'équation (5.26), on reconnaît l'expression du laplacien à une dimension en coordonnées cylindriques.

### 5.3.2 Forme du champ de pion $\vec{\pi}$

On peut accéder à  $\pi^i(\tau)$  par intégration de l'équation (5.26), compte tenu de la condition limite  $\pi^i(\tau_0) = 0$  (les pions sont inexistantes pour  $\tau < \tau_0$ ).

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} = \frac{A}{\tau} \quad \pi^i = A \ln \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right). \quad (5.27)$$

La condition initiale sur  $\pi^i(\tau_0)$  n'a pas de conséquence sur les résultats car la dépendance en champ de pion apparaît toujours sous la forme de la dérivée du champ de pion par rapport au temps propre : seule la connaissance de  $A$  est nécessaire.  $A$  est en fait une variable aléatoire. En effet, on ne connaît pas la valeur exacte de  $A$  car la vitesse des pions formés en  $\tau = \tau_0$  peut varier. Cependant, on peut pallier le problème si on connaît la distribution des valeurs de  $A$  en  $\tau_0$  car on pourra alors, avec ces conditions initiales différentes, réaliser des moyennes et accéder au comportement du système dans la limite des grands nombres. Il faut donc déterminer la distribution de la variable aléatoire  $A$  en  $\tau_0$ . La partie de la densité d'énergie prenant en compte la brisure spontanée (4.15) se met sous la forme :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2. \quad (5.28)$$

De ce fait, la matrice densité du système  $\rho$  est proportionnelle à :

$$\rho = \exp \left( -\beta \int dx^3 T^{00} \right) \propto \exp \left( -\frac{\beta}{2} \int dx^3 \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2 \right). \quad (5.29)$$

La constante d'intégration  $A$  est indépendante de  $i$  quand on considère la symétrie d'isospin vérifiée. La matrice densité devient alors, avec  $g_\pi = 3$  :

$$\rho \propto \exp \left( -\frac{\beta}{2} \int dx^3 g_\pi \left( \frac{A}{\tau} \right)^2 \right). \quad (5.30)$$

Pour  $\tau = \tau_0$ , la matrice densité prend la forme d'une gaussienne, avec  $V_0/\gamma_{cm}$  le volume initial du système dans le référentiel du laboratoire ;  $V_0$  étant le volume initial dans le référentiel du centre de masse et  $\gamma_{cm}$  le facteur de Lorentz assurant le passage entre les deux référentiels :

$$\rho(\tau_0) \propto \exp \left( -\frac{\beta}{2} \frac{V_0}{\gamma_{cm}} g_\pi \left( \frac{A}{\tau_0} \right)^2 \right). \quad (5.31)$$

On estime (cf. figure 5.1) le volume initial  $V_0$  par  $V_0 = \pi R^2 2c\tau_0$ , avec  $R \simeq 5 fm$ , rayon des noyaux projectile et cible, et  $2c\tau_0 = 2 fm$ , distance séparant le projectile et la cible. De plus,  $\gamma_{cm} = E_{lab}/\sqrt{s} \simeq 10$  dans le domaine d'énergie envisagé.  $E_{lab}$  correspond à l'énergie dans le référentiel du laboratoire et  $\sqrt{s}$  à l'énergie dans le centre de masse. Ainsi, la distribution de  $A$  en  $\tau_0$  est une gaussienne centrée en 0 et de variance :

$$\sigma^2(\tau_0) = \frac{T(\tau_0)\tau_0\gamma_{cm}}{2g_\pi\pi R^2} \simeq 4,25 \text{ MeV} \cdot fm^{-1}. \quad (5.32)$$

On aboutit au système suivant, soluble analytiquement :

$$s(\tau) = s(\tau_0) \frac{\tau_0}{\tau} \quad (5.33)$$

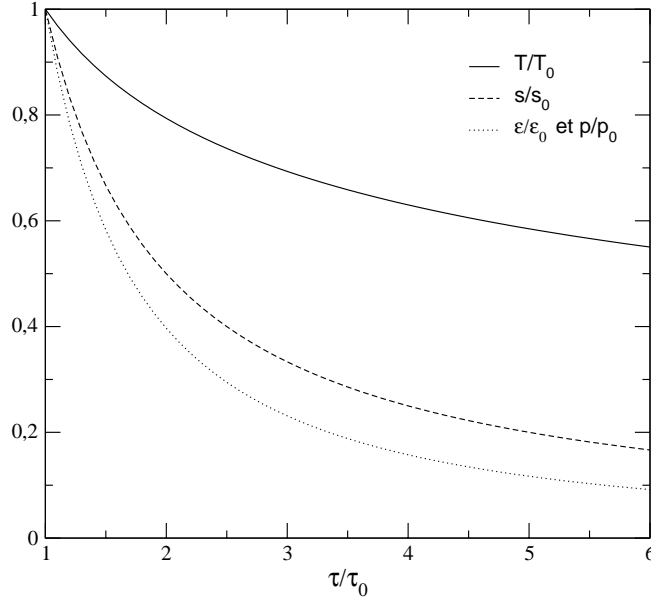


FIG. 5.5: Superposition des grandeurs sans dimensions du cas idéal et du cas avec brisure spontanée de symétrie chirale au deuxième ordre en champ de pion.

$$\left( \frac{s(\tau_0)\tau_0}{\tau} - 4aT^3 \right) \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(\tau) = T(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{1/3} \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} + \frac{T s(\tau_0)\tau_0}{\tau^2} - g_\pi \frac{A^2}{\tau^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \epsilon(\tau) = \epsilon(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} - \frac{g_\pi A^2}{2 \tau_0^2} \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^2 \quad (5.35)$$

$$p = p(\tau_0) \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^{4/3} + \frac{g_\pi A^2}{2 \tau_0^2} \left( \frac{\tau_0}{\tau} \right)^2. \quad (5.36)$$

Les principales hypothèses pour aboutir au précédent système d'équations sont : un développement au deuxième ordre en champ de pion dans la zone centrale ( $y = 0$ ) où les baryons sont négligés, en supposant que les grandeurs du système ne dépendent que du temps propre et pas de la rapidité, avec de plus  $f_t = f_s = f_\pi$  et la symétrie d'isospin vérifiée. Dans le cadre de cette étude, on trouve alors que la densité d'entropie et la température ne sont pas modifiées. En revanche, il apparaît une correction à la pression et à la densité d'énergie. D'autre part, le système d'équations vérifie  $\epsilon + p = Ts$ .

Afin d'estimer l'ordre de grandeur des termes correctifs par rapport aux termes correspondant au cas idéal dans  $\epsilon$  et  $p$ , on remplace pour  $\tau = \tau_0$ ,  $A^2$  par  $\langle A^2 \rangle \equiv \sigma^2(\tau_0)$ . On trouve alors en s'aidant de (5.7) une correction de l'ordre de 1% au cas idéal. C'est ce que l'on observe en comparant la densité d'entropie et d'énergie, la pression et la température du cas idéal et du cas avec brisure spontanée de symétrie chirale au deuxième ordre en champ de pion car dans tous les cas les courbes se superposent (voir figure 5.5).



Négliger la brisure spontanée de symétrie chirale dans le traitement hydrodynamique du système semble donc être une bonne approximation. Mais nous n'avons pas pris en compte la dépendance explicite en température des constantes de désintégration spatiales et temporelles des pions. Nous allons donc étendre la formule connue de leur dépendance pour les basses températures à tout le domaine considéré dans cette étude.

### 5.3.3 Dépendance en température des constantes de désintégration

Dans les équations (5.18), (5.19), (5.20) et (5.21), on pose maintenant (développement basse température)  $f_t^2 = f_s^2 = f_\pi^2(1 - T^2/(6f_\pi^2))$  [12]. On obtient alors une nouvelle équation pour la température :

$$4a\tau T^3 - \frac{A'^2}{\tau(1 - T^2/(6f_\pi^2))^2} \frac{T}{6f_\pi^2} = s(\tau_0)\tau_0. \quad (5.37)$$

Comme précédemment,  $A'$  est la constante d'intégration de l'équation 5.21 :

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} = \frac{A'}{\tau(1 - T^2/(6f_\pi^2))}. \quad (5.38)$$

Le terme supplémentaire dans la densité d'énergie dû à la brisure de symétrie étant :

$$\epsilon_1 = \frac{f_s^2}{2f_\pi^2} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \pi^i}{\partial \tau} \right)^2, \quad (5.39)$$

on a la relation suivante pour la valeur moyenne :  $\langle A'^2 \rangle = \langle A^2 \rangle (1 - T_0^2/(6f_\pi^2))$ . Le résultat numérique pour le profil de température est présenté sur la figure 5.6. On voit que la correction, qui induit un refroidissement plus rapide du système, est de l'ordre de 5 %. Mais cette valeur est certainement surestimée à cause de l'approximation faite pour la dépendance des constantes de désintégration du pion. On peut alors en conclure que l'on peut décrire le système à l'aide du modèle du fluide parfait relativiste. Cependant, pour l'instant, aucun effet dissipatif n'a été pris en compte. Toute source de dissipation, comme par exemple la viscosité, peut remettre *a priori* en question la validité du recours au fluide idéal.

## 5.4 Prise en compte de la viscosité

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié l'effet sur le profil de température dans le modèle de Bjorken à (1+1) dimensions des corrections dues à la brisure de symétrie chirale dans les équations hydrodynamiques. Nous avons vu que ces corrections étaient faibles mais la brisure de la symétrie n'est pas la seule correction au fluide parfait. Qu'en est-il des effets de la dissipation ? Cette question a déjà été posée récemment, par exemple dans la référence [18]. Nous allons donc nous intéresser à l'effet de la viscosité comme correction à la description hydrodynamique habituelle dans le modèle de Bjorken.

### 5.4.1 Pions de masse nulle

On suppose maintenant que la symétrie chirale n'est pas spontanément brisée. Nous reprenons ici les hypothèses de A. Muronga [18], c'est-à-dire que l'on se place toujours dans le modèle hydrodynamique à (1+1) dimensions de Bjorken. Le système est considéré comme un gaz de pions

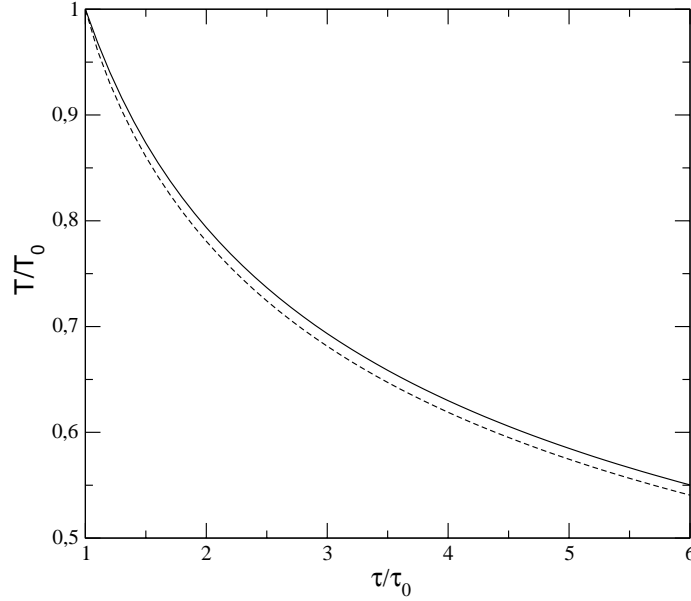


FIG. 5.6: Profil de température par rapport au temps propre pour deux cas : sans (courbe supérieure) et avec (courbe inférieure) effet de la brisure de symétrie.

ultrarelativistes à la limite chirale ( $m_\pi = 0$ ). Les grandeurs du système, ne dépendant que de  $\tau$ , sont donc de la forme, avec  $a = \pi^2/30$  :

$$P = aT^4 \quad \epsilon = 3aT^4 \quad s = 4aT^3. \quad (5.40)$$

Pour les particules de masse nulle, la viscosité volumique  $\zeta$  s'annule : seule la viscosité de cisaillement  $\eta$  intervient dans l'équation de l'énergie. La valeur choisie pour  $\eta$  est celle donnée dans la référence [42], calculée avec une section efficace donnée par l'algèbre des courants :  $\eta = b/T$ , avec  $b = \pi f_\pi^4/8$ . À partir de la conservation du tenseur énergie-impulsion qui, maintenant, contient un terme de flux dissipatif ( $T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - Pg^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}$ ), on forme  $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu}$  et on trouve que l'équation d'évolution de la densité d'énergie est :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = -\frac{4}{3} \frac{\epsilon}{\tau} + \frac{\Phi}{\tau} \quad (5.41)$$

avec  $\Phi = \pi^{00} - \pi^{zz}$ .  $\pi^{\mu\nu}$  est le tenseur des contraintes visqueuses et sa valeur diffère suivant "l'ordre" de la théorie hydrodynamique. En effet, si l'on considère le cas du fluide parfait, il n'y a pas de dissipation  $\eta = 0$ , c'est l'ordre zéro de la théorie :

$$\Phi = 0. \quad (5.42)$$

Le premier ordre de la dissipation correspond à l'hypothèse de linéarité du flux d'entropie dans les quantités dissipatives (lois phénoménologiques de Fourier et Fick) : lorsqu'une inhomogénéité apparaît dans le système, ce dernier réagit, et un flux proportionnel au gradient se développe pour

restaurer l'équilibre. Cela correspond, dans le modèle de Bjorken où la force  $\partial_\mu u^\mu = 1/\tau$ , à :

$$\Phi = \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau} \quad (5.43)$$

Le second ordre est le cas où le flux d'entropie est supposé quadratique dans les quantités dissipatives, ceci pour remédier à l'instabilité du premier ordre (qui conduit notamment à des temps de relaxation infinis). On introduit un temps de relaxation pour les flux (théorie de Müller-Israel-Stewart) :

$$\tau_\pi \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = -\Phi + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\tau} \quad (5.44)$$

On a cette fois-ci un temps de relaxation fini :  $\tau_\pi = 3\eta/2p$  (pour des particules de masse nulle).

Le système d'équations est fermé pour les trois ordres car, une fois  $\epsilon$  et  $\Phi$  connus, on peut alors accéder à  $T$  puis  $s$  et  $P$  en utilisant (5.40).

Aux ordres 1 et 2, le système n'est pas soluble analytiquement, à cause de la dépendance en température de la viscosité. La résolution numérique montre que la correction due à la viscosité comparée au cas idéal est totalement négligeable, non seulement pour le cas (non physique mais usuel) du premier ordre, mais également pour le second ordre. Si on trace sur un même graphique les grandeurs du système au trois ordres, on trouve des courbes pratiquement confondues (voir figure 5.9). Ces résultats diffèrent de ceux présentés dans la référence [18], ceci à cause d'une petite erreur de calcul [19]. Dans ce cas de figure, l'approximation fluide parfait est donc aussi réaliste. Ainsi, le traitement hydrodynamique de la matière nucléaire dans les deux situations précédentes (prise en compte de la brisure spontanée de symétrie chirale ou prise en compte de la viscosité) à l'aide du modèle du fluide parfait relativiste constitue apparemment une bonne approximation. Or, ces résultats reposent sur les hypothèses de la référence [18]. Dans le paragraphe suivant nous allons discuter la valeur de la viscosité choisie et modifier cette conclusion.

## 5.4.2 Pions massifs

Il existe deux approches pour trouver les équations de transport qui, avec les équations de conservation, constituent les équations hydrodynamiques du système. L'approche phénoménologique basée sur la thermodynamique et le principe de positivité de l'entropie (cette approche sera utilisée dans le chapitre suivant) et l'approche de la théorie cinétique basée sur l'équation de Boltzmann. Cette dernière permet de calculer les coefficients de transport *via* le développement de Chapman-Enskog. Avec la méthode des 14 moments de Grad, on peut accéder aux temps de relaxation [37]. Dans le paragraphe précédent nous reprenions les hypothèses faites dans la référence [18]. Or, les dépendances en température choisies pour la viscosité  $\eta$  et le temps de relaxation  $\tau_\pi$  ne sont valables que pour des pions de masse nulle et lorsque la section efficace  $\pi - \pi$  est donnée par l'algèbre des courants. Si maintenant nous prenons des pions massifs et une section efficace expérimentale, ces dépendances sont complètement différentes, surtout pour la viscosité [42, 21]. En effet, cette dernière augmente avec la température et a des valeurs beaucoup plus importantes, comme on peut le voir sur la figure 5.7. Les valeurs pour les pions massifs sont celles de la référence [21] qui ont été calculées avec une distribution de Bose-Einstein dans le terme de collision et pour un potentiel chimique égal à 100 MeV. Les valeurs des temps de relaxation sont elles aussi différentes (voir figure 5.8). Avec ces dépendances plus réalistes pour  $\eta$  et  $\tau_\pi$ , on résout une nouvelles fois le système d'équations différentielles pour  $\epsilon$  et  $\Phi$ , et on obtient de nouvelles courbes pour l'évolution de la température (figure 5.9).

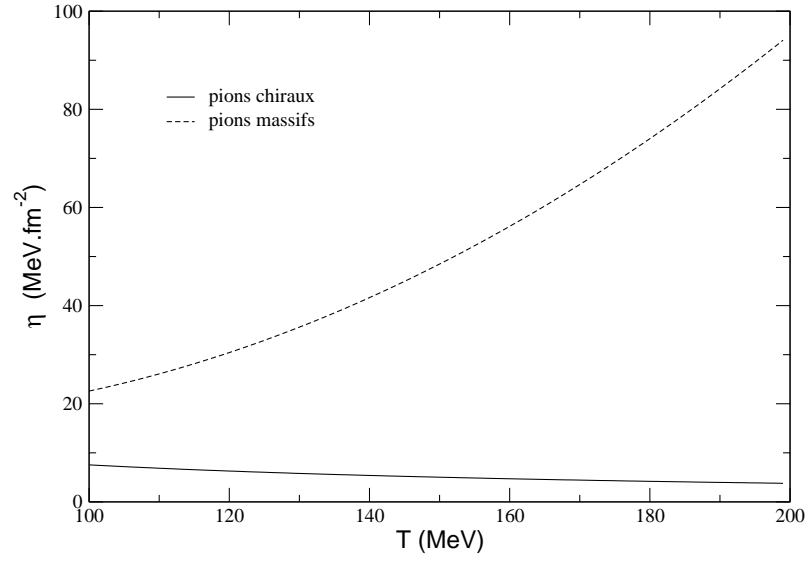


FIG. 5.7: Valeurs de la viscosité pour des pions de masse nulle [42] et pour des pions massifs [21].

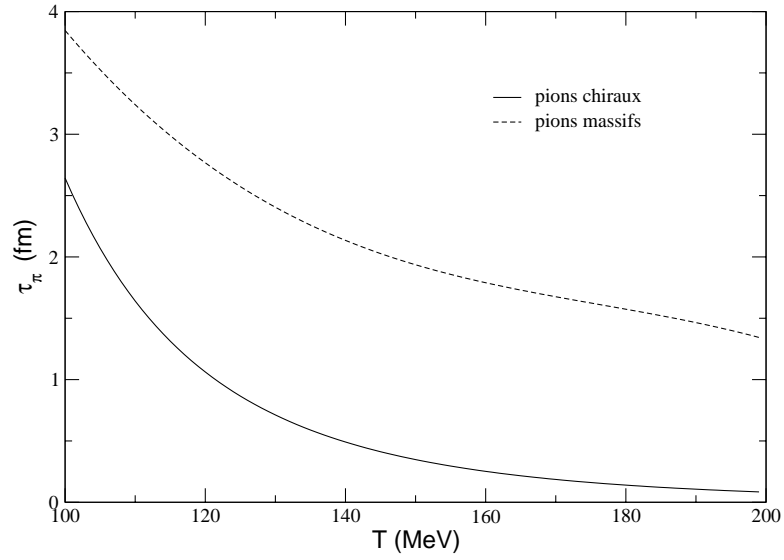


FIG. 5.8: Valeurs du temps de relaxation associé à la viscosité pour des pions de masse nulle [42] et pour des pions massifs [21].

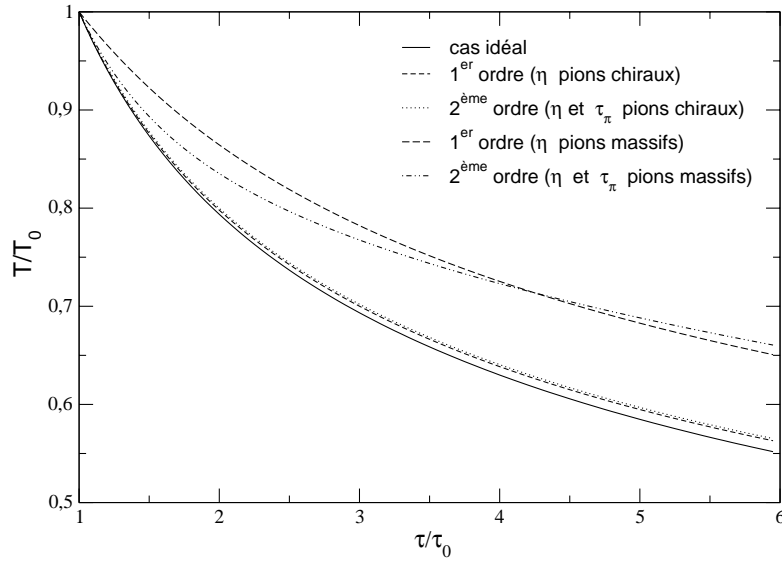


FIG. 5.9: Profil de température par rapport au temps propre pour le fluide parfait, le premier et le second ordre de la théorie dissipative.

On peut observer cette fois, pour les pions massifs, que les premier et second ordres sont toujours de même amplitude mais environ 20% au-dessus du fluide parfait. Par exemple, pour une température initiale de 200 MeV, la température passe de 110 MeV pour le cas idéal à 140 MeV avec les effets dissipatifs pour  $\tau/\tau_0 = 6$ . Les effets dissipatifs induisent donc un refroidissement plus lent du système, et par conséquent devraient être pris en compte dans les simulations des collisions d'ions lourds.

# Chapitre 6

## Dissipation

Dans ce chapitre, on va établir les équations hydrodynamiques de deux systèmes avec symétrie brisée. Le premier est le superfluide qui nous a déjà servi d'exemple dans la première partie : les équations relativistes ainsi que la dissipation dans le cas non relativiste sont connues. Le deuxième système est celui introduit au début de cette partie et qui nous permet de décrire la matière hadronique.

### 6.1 Hydrodynamique relativiste du superfluide : processus dissipatifs

Rappelons tout d'abord les équations pour le superfluide relativiste idéal (c'est-à-dire non dissipatif) :

$$\partial_\mu(n_0 u^\mu - V^2 \partial^\mu \phi) = 0 \quad (6.1)$$

$$\partial_\mu[(\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + V^2 \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi] = 0 \quad (6.2)$$

$$u^\mu \partial_\mu \phi = -\mu_0 \quad (6.3)$$

Ces équations contiennent la conservation de l'entropie, puisqu'il n'y a pas de processus dissipatifs. Pour le montrer explicitement, il suffit de projeter la deuxième équation précédente sur la direction de la quadri-vitesse  $u^\nu$  :  $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ . On obtient alors facilement que :  $\partial_\mu(s_0 u^\mu) = 0$

Pour établir les équations en présence de processus dissipatifs, on doit déterminer la forme des termes supplémentaires apparaissant dans les flux d'énergie-impulsion, de particules et de l'équation pour la phase, soit respectivement  $\nu^\mu$ ,  $\tau^{\mu\nu}$  et  $\phi'_0$  :

$$\partial_\mu(n_0 u^\mu - V^2 \partial^\mu \phi + \nu^\mu) = 0 \quad (6.4)$$

$$\partial_\mu[(\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + V^2 \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \tau^{\mu\nu}] = 0 \quad (6.5)$$

$$u^\mu \partial_\mu \phi = -\mu_0 - \phi'_0 \quad (6.6)$$

La vitesse hydrodynamique  $u^\mu$  présente dans les équations ci-dessus peut tout aussi bien représenter physiquement la vitesse du transport d'énergie ou la vitesse du transport de particules. Il existe en effet une liberté de choix qui n'a aucune influence sur la forme des équations en l'absence de dissipation mais, qui, en présence de dissipation impose des contraintes sur la forme des termes

rajoutés dans les équations hydrodynamiques. En ce qui nous concerne, nous allons faire le choix, purement arbitraire, de Landau et Lifshitz, c'est-à-dire que la vitesse  $u^\mu$  représentera désormais la vitesse de transport d'énergie. Les contraintes pour les termes supplémentaires prendront alors la forme ([5]) :

$$u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \text{ et } u_\mu \nu^\mu = 0.$$

Le choix de Eckart donne lieu à d'autres contraintes [41].

Avec ces équations, il est alors possible d'établir explicitement la loi d'accroissement de l'entropie, qui est contenue dans les équations du mouvement. En écrivant  $u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , on obtient en effet :

$$\partial_\mu (s_0 u^\mu - \frac{\mu_0}{T_0} \nu^\mu) = -\nu^\mu \partial_\mu \frac{\mu_0}{T_0} + \frac{\phi'_0}{T_0} \partial_\mu (V^2 \partial^\mu \phi) + \frac{\tau^{\mu\nu}}{T_0} \partial_\mu u_\nu \quad (6.7)$$

Cette équation est de la forme générique :  $\partial_\mu S^\mu = \sigma$  où  $S^\mu$  est le quadri-vecteur densité de flux d'entropie et  $\sigma$  la production d'entropie due aux processus dissipatifs.  $\sigma$  est une forme bilinéaire entre les densités de flux et les forces thermodynamiques.

Par ailleurs, dans le régime hydrodynamique, on est par définition près de l'équilibre. Par conséquent, les termes  $\tau^{\mu\nu}$ ,  $\nu^\mu$  et  $\phi'_0$  peuvent s'exprimer linéairement en fonction des forces thermodynamiques. Les coefficients de proportionnalité sont les coefficients de transport. Leur signification physique est la caractérisation de l'amplitude de la réponse du système (les flux) à une certaine perturbation (les forces). La solution la plus générale permet ainsi d'exprimer *a priori* les flux en fonction de l'ensemble des forces. Cependant il existe des contraintes qui permettent d'éliminer certains termes : les relations  $u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$  et  $u_\mu \nu^\mu = 0$  imposent que certains couplages soient nuls. Ensuite, le principe de réciprocité d'Onsager, combiné à la positivité de l'entropie conduit à :

$$\nu^\mu = \kappa (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \partial_\nu \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \tau^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) & \left[ \zeta_1 \partial_\lambda (V^2 \partial^\lambda \phi) + \left( \zeta_2 - \frac{2}{3} \eta \right) \partial_\lambda u^\lambda \right] \\ & + \eta \left[ (g^{\mu\lambda} - u^\mu u^\lambda) \partial_\lambda u^\nu + (g^{\lambda\nu} - u^\lambda u^\nu) \partial_\lambda u^\mu \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\phi'_0 = \zeta_1 \partial_\mu u^\mu + \zeta_3 \partial_\mu (V^2 \partial^\mu \phi) \quad (6.10)$$

où  $\kappa$  est proportionnel à la conduction thermique et  $\eta, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$  sont les viscosités de cisaillement et volumiques (les notations sont celle définies dans [5]). La thermodynamique impose que le taux d'accroissement de l'entropie  $\sigma$  doit être essentiellement positif. Cela implique que  $\eta, \zeta_2, \zeta_3$  sont positifs et  $\zeta_1^2 \leq \zeta_2 \zeta_3$ . Le signe de  $\zeta_1$  doit quant à lui être déterminé par des considérations physiques. On peut en fait vérifier par comparaison directe avec [5] que  $\zeta_1$  est également positive.

## 6.2 Hydrodynamique du fluide chiral

Nous allons maintenant établir les équations hydrodynamiques en présence de processus dissipatifs pour le système de pions en présence de matière nucléaire décrit au début de cette partie.

En utilisant l'exemple précédent du superfluide comme guide, on constate qu'il va falloir introduire autant de termes supplémentaires que de variables hydrodynamiques. Soit, de manière explicite :  $\nu^\mu$  pour le nombre baryonique,  $\tau^{\mu\nu}$  pour le tenseur énergie-impulsion,  $j_{L,R}^\mu \equiv j_{L,R;i}^\mu \tau_i / 2$  pour les charges gauche et droite et également  $\Sigma'_0 \equiv \Sigma'_{0,i} \tau_i / 2$  pour les phases. Nous avons vu au paragraphe 4.2.3 comment transformer le système d'équations du mouvement pour les quatorze

variables en un système d'équations covariantes. Les termes dissipatifs dans les deux équations (4.17) et (4.19) s'introduisent facilement comme pour le fluide normal :

$$\partial_\mu(n_0 u^\mu + \nu^\mu) = 0 \quad (6.11)$$

$$\partial_\mu((\epsilon + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} + f_s^2 \text{tr}(\partial^\mu \Sigma \partial^\nu \Sigma^\dagger + \partial^\nu \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \tau^{\mu\nu}) = 0 \quad (6.12)$$

Par contre, pour introduire les termes propres à la symétrie chirale, il n'est pas possible de partir des équations initiales pour les charges gauches et droites. En effet, on a vu que ces équations (4.12) ne sont pas directement covariantes. Il faut en fait se donner un hamiltonien et former des combinaisons particulières (propres au hamiltonien choisi) des variables initiales pour finalement aboutir à des équations covariantes. Par conséquent, le fait d'ajouter les termes dissipatifs dans les équations initiales induirait le même problème qu'ajouter des termes dans le hamiltonien : d'autres combinaisons devraient donc être formées pour aboutir à des équations covariantes. La stratégie va donc être de partir directement des équations finales (4.20) et (4.21). Ces équations contiennent les équations de conservation des courants droit et gauche :  $\partial_\mu J_R^\mu = 0$  et  $\partial_\mu J_L^\mu = 0$  ainsi que l'équation du mouvement pour les phases :  $u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger = \frac{i}{2} \gamma (\mu_L - \Sigma \mu_R \Sigma^\dagger)$  (équation initiale (4.12) mise sous forme covariante). Introduisons tout de suite deux notations pour cette dernière équation :  $A = u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger$  et  $\mu_{A0} = \gamma (\mu_L - \Sigma \mu_R \Sigma^\dagger)$ . On constate alors une analogie formelle avec le cas du superfluide (équation (6.6)). On introduit par conséquent la dissipation de manière analogue. Soit explicitement :

$$iA = -\frac{1}{2} \mu_{A0} - \Sigma'_0 \quad (6.13)$$

En effet, le membre de gauche s'identifie à  $u^\mu \partial_\mu \phi$  et le membre de droite à  $-\mu_0 - \phi'_0$  puisque par analogie avec  $U(1)$ ,  $i\Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger$  est la "vitesse superfluide" qui apparaît dans les termes dus à la brisure de symétrie dans les équations hydrodynamiques, et  $\frac{1}{2} \mu_{A0}$  est dans un cas particulier le "potentiel chimique" de la charge axiale.

Pour les deux autres équations (pour  $A$  : (4.20) et  $\alpha$  : (4.21)), c'est un peu plus compliqué. Rappelons tout d'abord que ces équations ont été obtenues après remplacement des variables conjuguées (et notamment  $\mu_{A0}$ ) par les variables du hamiltonien et après avoir formé la combinaison  $\rho_L + \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger$ , (respectivement la combinaison  $\rho_L - \Sigma \rho_R \Sigma^\dagger = \rho_A$ ). Par ailleurs on avait également remarqué qu'il était possible de retrouver les équations de conservation des courants droit et gauche exprimés avec ces deux nouvelles variables, en utilisant ces deux équations. Aussi, pour comprendre comment s'introduisent les termes dissipatifs, nous allons faire le cheminement inverse, c'est-à-dire partir des équations de conservation des courants droit et gauche. Ainsi, comme pour toute équation de type équation de conservation, nous pouvons écrire pour les courants chiraux :

$$J_L^\mu = -\frac{i}{4} ((f_t^2 - f_s^2) u^\mu A + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + \frac{1}{2} u^\mu \alpha + j_L^\mu \quad (6.14)$$

$$J_R^\mu = -\frac{i}{4} ((f_t^2 - f_s^2) u^\mu (-\Sigma^\dagger A \Sigma) + f_s^2 \Sigma^\dagger \partial^\mu \Sigma) + \frac{1}{2} u^\mu \Sigma^\dagger \alpha \Sigma + j_R^\mu \quad (6.15)$$

On peut interpréter ces expressions par analogie avec le superfluide : elles contiennent une partie charge normale avec la vitesse normale  $u^\mu$  et une partie brisure de symétrie avec la vitesse superfluide  $i\Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger$  ; la "densité superfluide" peut être identifiée avec  $f_s^2/2$ . Ces deux courants sont bien entendu conservés et on va maintenant reformer les équations pour les combinaisons "vectorielle"



et “axiale”, c’est-à-dire  $\partial_\mu J_L^\mu + \Sigma J_R^\mu \Sigma^\dagger$  et  $\partial_\mu J_L^\mu - \Sigma J_R^\mu \Sigma^\dagger$ . La première nous donne l’équation pour  $\alpha$  :

$$\partial_\mu(\alpha u^\mu) + \frac{1}{2}[A, \alpha] = -\partial_\mu j_L^\mu - \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger \quad (6.16)$$

qui est “presque” une équation de conservation pour la charge “presque” vectorielle ! La deuxième combinaison nous donne :

$$-\frac{i}{2}\partial_\mu((f_t^2 - f_s^2)u^\mu A + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) - \frac{1}{2}[A, \alpha] = -\partial_\mu j_L^\mu + \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger \quad (6.17)$$

qui est “presque” une équation de conservation pour la charge “presque” axiale ! On voit donc que le terme de brisure de symétrie n’intervient en fait que dans cette équation.

Avec ce nouveau système d’équations, (6.11), (6.12), (6.16), (6.17) et (6.13), il s’agit maintenant d’écrire l’équation de la production d’entropie. Celle-ci sera obtenue, comme toujours, en contractant l’équation pour le tenseur énergie-impulsion (6.12) par la vitesse hydrodynamique  $u^\mu$ . Du point de vue technique, l’expression de  $\epsilon + p$  et de la différentielle de la pression  $\partial_\mu p$  seront également nécessaires pour simplifier le calcul. On introduira par ailleurs les notations suivantes : la vitesse superfluide sera notée  $iL_\mu \equiv i\Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger$  et les “charges”  $A$  et  $\alpha$  seront remplacées par leurs valeurs en l’absence de dissipation, c’est-à-dire les variables conjuguées  $\mu_{A0} = -2iA$  et  $\mu_{V0} = 4\alpha/f_v^2$ .

Avec toutes ces notations, les équations prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon + p &= T_0 s_0 + \mu_0 n_0 + \frac{(f_t^2 - f_s^2)}{8} \text{tr} \mu_{A0}^2 + \frac{f_v^2}{8} \text{tr} \mu_{V0}^2 \\ \partial_\mu p &= s_0 \partial_\mu T_0 + n_0 \partial_\mu \mu_0 + \frac{(f_t^2 - f_s^2)}{8} \text{tr} \partial_\mu (\mu_{A0}^2) + \frac{f_v^2}{8} \text{tr} \partial_\mu (\mu_{V0}^2) - \frac{f_s^2}{4} \text{tr} \partial_\mu (L_\nu L^\nu) \\ \partial_\mu \left( (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} - \frac{f_s^2}{2} \text{tr} L^\mu L^\nu + \tau^{\mu\nu} \right) &= 0 \\ \partial_\mu \left( \frac{f_v^2}{4} \mu_{V0} u^\mu \right) + \frac{i}{4} [\mu_{A0}, \frac{f_v^2}{4} \mu_{V0}] &= -\partial_\mu j_L^\mu - \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger \\ \partial_\mu \left( (f_t^2 - f_s^2) u^\mu \frac{1}{4} \mu_{A0} - \frac{i}{2} f_s^2 L^\mu \right) - \frac{i}{4} [\mu_{A0}, \frac{f_v^2}{4} \mu_{V0}] &= -\partial_\mu j_L^\mu + \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger \end{aligned}$$

Il est alors maintenant facile d’obtenir :

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0 \\ &= T_0 \partial_\mu (s_0 u^\mu) + \mu_0 \partial_\mu (n_0 u^\mu) + \frac{1}{8} \text{tr} \mu_{A0} \partial_\mu [(f_t^2 - f_s^2) u^\mu \mu_{A0}] + \frac{1}{2} \text{tr} \mu_{V0} \partial_\mu \left( \frac{f_v^2}{4} \mu_{V0} u^\mu \right) \\ &\quad + \frac{f_s^2}{2} u^\mu L^\nu \partial_\mu L_\nu - \frac{1}{2} u_\nu \partial_\mu (f_s^2 L^\mu L^\nu) + u_\nu \partial_\mu \tau^{\mu\nu} \\ &= T_0 \partial_\mu (s_0 u^\mu) - \mu_0 \partial_\mu (\nu^\mu) + u_\nu \partial_\mu \tau^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \text{tr} \mu_{A0} \left( \frac{i}{2} \partial_\mu (f_s^2 L^\mu) - \partial_\mu j_L^\mu + \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \mu_{V0} (-\partial_\mu j_L^\mu - \Sigma \partial_\mu j_R^\mu \Sigma^\dagger) + \frac{f_s^2}{2} u^\mu L^\nu \partial_\mu L_\nu - \frac{1}{2} u_\mu (L^\mu \partial_\nu (f_s^2 L^\nu) + f_s^2 L^\nu \partial_\nu L^\mu) \end{aligned}$$

Au niveau technique, la propriété de cyclicité des traces dans les expressions a permis d’éliminer à chaque étape les commutateurs et surtout de faire réapparaître les potentiels chimiques “initiaux”

$\mu_{L0}$  et  $\mu_{R0}$  directement en facteur des termes dissipatifs associés (voir équation ci-dessous). Par ailleurs, la combinaison  $iu_\mu L^\mu + \frac{1}{2}\mu_{A0}$  intervient directement et peut donc être remplacée par  $-\Sigma'_0$  (6.13). Enfin, les autres termes faisant intervenir  $L^\mu$  s'annulent. Finalement, l'équation d'évolution de l'entropie peut s'exprimer de la manière suivante ( $u_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$ ,  $u_\mu \nu^\mu = 0$  et  $u_\mu j_{L,R}^\mu = 0$ ) :

$$\partial_\mu (s_0 u^\mu) = \frac{\mu_0}{T_0} \partial_\mu (\nu^\mu) + \frac{\tau^{\mu\nu}}{T_0} \partial_\mu (u^\nu) + \text{tr} \left( \frac{\mu_{L0}}{T_0} \partial_\mu j_L^\mu + \frac{\mu_{R0}}{T_0} \partial_\mu j_R^\mu + \frac{\Sigma'_0}{T_0} \partial_\mu \left( \frac{f_s^2}{2} i L^\mu \right) \right)$$

On en déduit alors le nouveau flux d'entropie ainsi que le terme de production d'entropie :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left( s_0 u^\mu - \frac{\mu_0}{T_0} \nu^\mu - \text{tr} \left( \frac{\mu_{L0}}{T_0} j_L^\mu + \frac{\mu_{R0}}{T_0} j_R^\mu \right) \right) &= -\nu^\mu \partial_\mu \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) \\ &+ \frac{\tau^{\mu\nu}}{T_0} \partial_\mu u_\nu - \text{tr} \left( j_L^\mu \partial_\mu \left( \frac{\mu_{L0}}{T_0} \right) + j_R^\mu \partial_\mu \left( \frac{\mu_{R0}}{T_0} \right) + \frac{\Sigma'_0}{T_0} \partial_\mu \left( \frac{f_s^2}{2} i L^\mu \right) \right) \end{aligned}$$

La production d'entropie est à nouveau une forme bilinéaire dans les flux dissipatifs et les forces thermodynamiques. Les flux s'expriment comme des combinaisons linéaires des forces de telle sorte que la production d'entropie soit positive, ce qui permet d'éliminer des coefficients de proportionnalité (coefficients de transport). Nous obtenons, après simplifications :

$$\Sigma'_0 = \left( 2\zeta_{1,i} \partial_\mu u^\mu + 2[\zeta_3]_{i,j} \partial_\mu \left( \frac{f_s^2}{2} i L_j^\mu \right) \right) \tau_i \quad (6.18)$$

$$\nu^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \left( \kappa \partial_\nu \frac{\mu_0}{T_0} + \kappa_{L,i} \cdot \partial_\nu \left( \frac{\mu_{L0,i}}{T_0} \right) + \kappa_{R,i} \cdot \partial_\nu \left( \frac{\mu_{R0,i}}{T_0} \right) \right) \quad (6.19)$$

$$j_L^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \left( \kappa_{L,i} \partial_\nu \frac{\mu_0}{T_0} + [\kappa_{LL}]_{i,j} \partial_\nu \left( \frac{\mu_{L0,j}}{T_0} \right) + [\kappa_{LR}]_{i,j} \partial_\nu \left( \frac{\mu_{R0,j}}{T_0} \right) \right) \tau_i \quad (6.20)$$

$$j_R^\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \left( \kappa_{R,i} \partial_\nu \frac{\mu_0}{T_0} + [\kappa_{LR}]_{j,i} \partial_\nu \left( \frac{\mu_{L0,j}}{T_0} \right) + [\kappa_{RR}]_{i,j} \partial_\nu \left( \frac{\mu_{R0,j}}{T_0} \right) \right) \tau_i \quad (6.21)$$

$$\tau^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) \left( \left( \zeta_2 - \frac{2}{3}\eta \right) \partial_\lambda u^\lambda + \zeta_{1,j} \partial_\mu \left( \frac{f_s^2}{2} i L_j^\mu \right) \right) + \eta \left( (g^{\mu\lambda} - u^\mu u^\lambda) \partial_\lambda u^\nu + (g^{\lambda\nu} - u^\lambda u^\nu) \partial_\lambda u^\mu \right) \quad (6.22)$$

où  $[Q]$  signifie que  $Q$  est une matrice  $3 \times 3$ . Selon le principe de réciprocity d'Onsager, toutes les matrices excepté  $[\kappa_{LR}]$  sont symétriques et  $\zeta_{4,i} = 4\zeta_{1,i}$ . On constate donc que la prise en compte de la brisure spontanée de la symétrie chirale augmente de manière significative le nombre de termes puisqu'il y a maintenant 39 coefficients indépendants ! Par ailleurs, si l'on représente la forme quadratique de la production d'entropie par une matrice  $12 \times 12$  ( $M$ ), il est facile de montrer que tous les coefficients se trouvant sur la diagonale doivent être positifs et qu'il existe des inégalités entre les 39 coefficients. Ces inégalités sont obtenues, comme dans le cas du superfluide, en exprimant le fait que tous les mineurs principaux (c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices  $M_k$  constituées des  $k$  premières lignes et des  $k$  premières colonnes de  $M$ ) doivent être positifs.

Nous voyons que les équations dissipatives pour la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  impliquent des couplages entre les courants baryonique, gauche et droit. Nous voyons également que la brisure spontanée de symétrie implique l'existence de coefficients de transport matriciels  $\zeta_1$  et  $\zeta_3$  relatifs à la force à trois composantes  $\partial_\mu [(f_s^2/2) i L_j^\mu]$ . Ces résultats sont présentés dans la référence [22].

### 6.3 Conclusion

La prise en compte de la dissipation dans le cas d'un système avec brisure de symétrie chirale est particulièrement délicate. Nous avons vu qu'il est nécessaire de se donner une forme explicite pour le hamiltonien, de former ensuite des combinaisons linéaires particulières, propres à ce hamiltonien, pour obtenir des équations covariantes. Ensuite, la dissipation peut s'introduire dans ces équations, mais pas directement, car ce ne sont pas les équations physiques : nous avons donc commencé par injecter la dissipation dans l'expression des lois de conservation des courants droits et gauches. Le résultat est que 39 coefficients indépendants sont *a priori* nécessaires à la description des phénomènes dissipatifs pouvant survenir dans un système. Il serait évidemment très intéressant d'exprimer de manière isolée chaque coefficient en termes de fonction de corrélation (formulation de Kubo) puis d'essayer de voir s'il existe des configurations particulières pour lesquelles ces coefficients pourraient avoir une influence importante, voire même, pourraient être mesurés. Cependant, il faut noter que cela est en fait peu probable : les mesures de coefficients de transport, même "habituels" (viscosité, conductivité thermique), sont très délicats à réaliser pour des systèmes petits. Par exemple, la viscosité de la matière nucléaire dans les collisions à basse énergie au GANIL, avec des systèmes de plusieurs dizaines de nucléons n'a pas encore été atteinte. On peut par conséquent penser, qu'à plus haute énergie, et pour des systèmes à durée de vie encore plus courte, des valeurs précises pour tous ces coefficients sont difficilement envisageables. Nous nous sommes donc limités dans le chapitre suivant à la viscosité de cisaillement.

## Troisième partie

### Calcul de $\eta$



# Chapitre 7

## Modèle $\lambda\phi^4$

Dans ce chapitre, nous allons nous placer dans le cadre la théorie  $\lambda\phi^4$  pour évaluer les fonctions de corrélations intervenant dans les expressions de la viscosité de cisaillement. Nous exposerons deux méthodes, une fondée sur la resommation directe des graphes, l'autre sur le calcul de la fonction de Green à quatre points via l'équation de Bethe-Salpeter.

### 7.1 Méthode de S.Jeon [23]

Pour simplifier notre problème, on travaille avec un champ scalaire et une interaction en  $\lambda\phi^4$ , c'est-à-dire que le lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (7.1)$$

et on utilise la métrique  $g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

La conservation du tenseur énergie-impulsion s'exprime par :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

avec  $T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$ . Notre point de départ sera l'expression de Kubo donnant  $\eta$  en fonction du tenseur des contraintes sans trace :

$$\eta = \frac{\beta}{20} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\vec{q} \rightarrow \vec{0}} \sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) \quad (7.2)$$

avec  $\sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q})$  la transformée de Fourier de la fonction de corrélation du tenseur des contraintes sans trace :  $\sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) \equiv \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \langle \pi_{lm}(t, \vec{x}) \pi^{lm}(0) \rangle_{eq}$  et

$$\pi_{lm}(x) \equiv T_{lm}(x) - \frac{1}{3} \delta_{lm} T_i^i(x) = (\delta_{li} \delta_{mj} - \frac{1}{3} \delta_{lm} \delta_{ij}) \partial_i \phi \partial_j \phi \quad (7.3)$$

Or, on peut relier la fonction de corrélation à la densité spectrale :

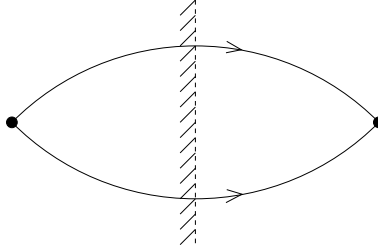
$$\rho_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) = \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \langle [\pi_{lm}(x), \pi^{lm}(0)] \rangle_{eq}$$

en utilisant la relation de Kubo-Martin-Schwinger (KMS) :  $\langle A(t)B(t') \rangle = \langle B(t' - i\beta)A(t) \rangle$ . En effet, on écrit :

$$\begin{aligned}\rho_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) &= \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \langle \pi_{lm}(x) \pi^{lm}(0) - \pi_{lm}(0) \pi^{lm}(x) \rangle_{eq} \\ &= \sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) - \int d^4x e^{i(\omega t - \vec{q} \cdot \vec{x})} \langle \pi_{lm}(t - i\beta, \vec{x}) \pi^{lm}(0) \rangle_{eq} \\ &= \sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) (1 - e^{-\beta\omega})\end{aligned}$$

En remarquant que :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\vec{q} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\omega} \rho_{\pi\pi}(\omega, \vec{q}) = \beta \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\vec{q} \rightarrow \vec{0}} \sigma_{\pi\pi}(\omega, \vec{q})$ , on exprime la viscosité en fonction de la densité spectrale :  $\eta = \frac{1}{20} \lim_{\omega \rightarrow 0} \lim_{\vec{q} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\omega} \rho_{\pi\pi}(\omega, \vec{q})$ .

On a donc besoin d'évaluer  $\rho_{\pi\pi}$ . Les diagrammes contribuant au calcul de  $\rho_{\pi\pi}$  ont deux vertex externes qui relient deux propagateurs. Ceci est dû à la forme bilinéaire en champs de  $\pi_{lm} \equiv \partial_l \phi \partial_m \phi - \frac{1}{3} \delta_{lm} \partial_k \phi \partial^k \phi$ . Le diagramme le plus simple satisfaisant ces conditions est celui à une boucle :



où les points représentent l'insertion de l'opérateur  $\pi$  et où on a représenté une coupure utile pour le calcul de la fonction de corrélation (Annexe D). Cependant, ce graphe à une boucle n'est pas le graphe dominant : il existe en effet toute une série de graphes (voir *fig. 7.1*) contribuant au même ordre. Pour comprendre cela, il faut examiner l'ordre en  $\lambda$  de ces graphes. Le graphe à une boucle, tout d'abord, fait intervenir le produit de deux propagateurs ayant le même quadri-moment puisque le moment extérieur est nul. Dans ce cas, il apparaît des produits de terme dont les pôles sont séparés de  $\Gamma_k \equiv \frac{\Sigma_L}{2E_k} \cong \mathcal{O}(\lambda)$ , ce qui donne une contribution de  $\mathcal{O}(1/\lambda^2)$  pour le graphe à une boucle. Ainsi, si l'on considère qu'une boucle contribue en général par un facteur  $1/\lambda^2$ , il devient extrêmement facile de comprendre pourquoi les graphes en échelle de la figure 7.1 contribuent au même ordre, puisque chaque "barreau" (2 vertex (ordre  $\lambda^2$ ) + 1 boucle (ordre  $1/\lambda^2$ )) est d'ordre 1.

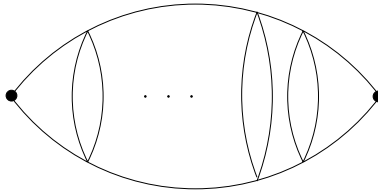


FIG. 7.1: Diagramme en échelle de la théorie  $\lambda\phi^4$ .

La somme de tous ces diagrammes peut s'écrire sous la forme d'une équation itérative avec un vertex effectif  $\mathcal{D}_\pi$ . Pour calculer ces diagrammes, il faut utiliser les règles de coupure et sommer

sur toutes les façons de couper le vertex effectif (voir Annexe E). Il existe quatre possibilités (voir figure 7.2) :

- soit les deux lignes entrant dans le vertex viennent d’une région non hachurée ;
- soit elles entrent dans le vertex en venant d’une région hachurée ;
- soit enfin une des lignes vient d’une région hachurée, et pas l’autre (il y a donc deux possibilités pour ce cas).

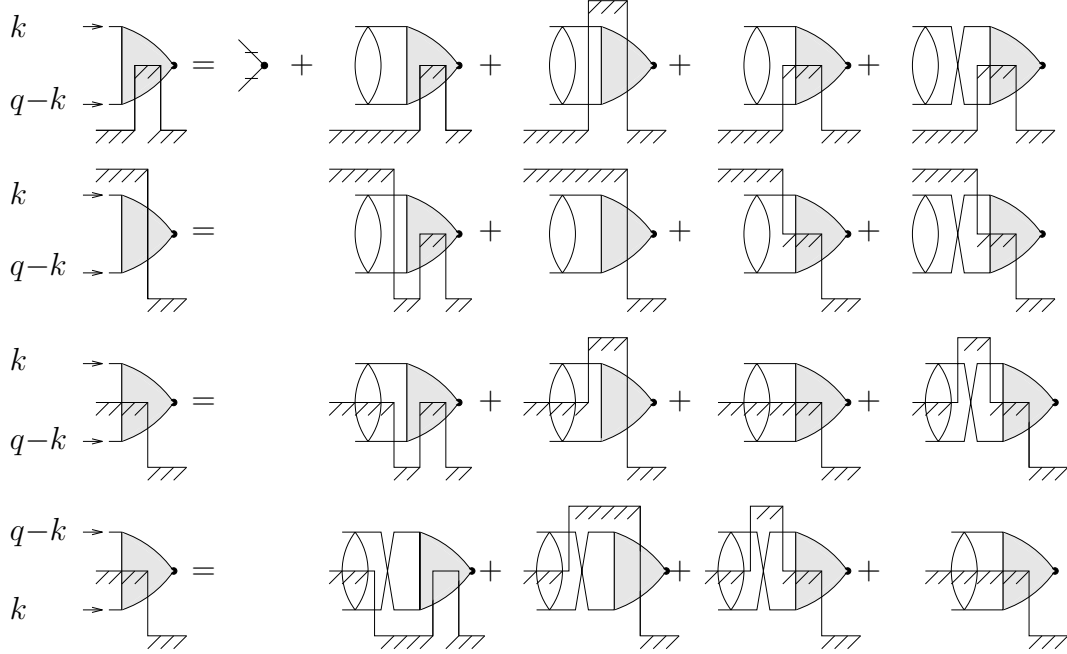


FIG. 7.2: Représentation en diagramme de l’équation intégrale pour le vertex effectif  $\mathcal{D}_\pi(k, q-k)$ .

La sommation de tous les diagrammes en échelle revient à l’équation intégrale linéaire pour le vertex effectif  $\mathcal{D}_\pi$  :

$$\mathcal{D}_\pi(k, q-k) = \mathcal{I}_\pi(k, q-k) + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathcal{M}(k-p) \mathcal{F}(p, q-p) \mathcal{D}_\pi(p, q-p) \quad (7.4)$$

Puisque le vertex a quatre composantes, l’équation intégrale (7.4) est une équation matricielle. Le premier terme du membre de droite de l’équation est un terme représentant l’action de l’opérateur  $\pi$ . Le premier terme dans l’intégrale est la matrice pour les différentes façons de couper les barreaux (boucles). Elle est de la forme :

$$\mathcal{M}(k-p) \equiv \begin{pmatrix} -iC(k-p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iC(k-p)^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(p-k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L(k-p) \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

où le barreau “non coupé” est :

$$C(k-p) \equiv -i \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \tilde{G}(l+k-p) \tilde{G}(l), \quad (7.6)$$



et le barreau “coupé” est :

$$L(k-p) \equiv \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} S(l+k-p) S(-l) . \quad (7.7)$$

$\tilde{G}(l)$  est le propagateur non coupé et  $S(l) \equiv [1+n(l^0)]\rho(l)$  est le propagateur coupé. Le second terme de l'intégrale est la matrice pour les différentes façons de couper les montants (lignes externes) :

$$\mathcal{F}(p, q-p) = \begin{pmatrix} \tilde{G}(p) \tilde{G}(q-p) & S(-p) S(p-q) & \tilde{G}(p) S(p-q) & S(-p) \tilde{G}(q-p) \\ S(p) S(q-p) & \tilde{G}(-p)^* \tilde{G}(p-q)^* & S(p) \tilde{G}(p-q)^* & \tilde{G}(-p)^* S(q-p) \\ \tilde{G}(p) S(q-p) & S(-p) \tilde{G}(p-q)^* & \tilde{G}(p) \tilde{G}(p-q)^* & S(-p) S(q-p) \\ S(p) \tilde{G}(q-p) & \tilde{G}(-p)^* S(p-q) & S(p) S(p-q) & \tilde{G}(-p)^* \tilde{G}(q-p) \end{pmatrix} . \quad (7.8)$$

L'équation (7.4) peut s'écrire de façon symbolique par :  $|\mathcal{I}_\pi\rangle = (1 - \mathcal{M})\mathcal{F}|\mathcal{D}_\pi\rangle$

En termes de vertex resommé  $|\mathcal{D}_\pi\rangle$ , la fonction de corrélation s'écrit :

$\sigma_{\pi\pi} = 2 < z_\pi |\mathcal{F}|\mathcal{D}_\pi\rangle$ , où  $z_\pi$  représente l'action de l'opérateur  $\pi$  (égale à  $k_l k_m - \delta_{lm} \vec{k}^2$ ). Quand le moment externe s'annule, la matrice  $\mathcal{F}(p, -p)$  peut s'écrire comme la somme de quatre produits scalaires :

$$\mathcal{F}(p, -p) = w(p)u^T(p) + h(p)j^T(p) + \kappa(p)\xi^T(p) + \mu(p)\zeta^T(p) \quad (7.9)$$

où :

$$w^T(p) \equiv (1, 1, (1+e^{-p^0\beta})/2, (1+e^{p^0\beta})/2) [1+n(p^0)] n(p^0) \frac{\rho(p)}{\Sigma_I(p)} , \quad (7.10)$$

$$u^T(p) \equiv (1, 1, (1+e^{p^0\beta})/2, (1+e^{-p^0\beta})/2) , \quad (7.11)$$

$$h^T(p) \equiv (0, 0, 1/4, -e^{p^0\beta}/4) \frac{\rho(p)}{\Sigma_I(p)} , \quad (7.12)$$

$$j^T(p) \equiv (0, 0, 1, -e^{-p^0\beta}) , \quad (7.13)$$

$$\kappa^T(p) \equiv (1, e^{-p^0\beta}, e^{-p^0\beta}, 1) [1+n(p^0)]^2 / [p^2 + m_{\text{phys}}^2 + \Sigma(p)]^2 , \quad (7.14)$$

$$\xi^T(p) \equiv (-1, -e^{-p^0\beta}, -1, -e^{-p^0\beta}) , \quad (7.15)$$

$$\mu^T(p) \equiv (1, e^{p^0\beta}, 1, e^{p^0\beta}) n(p^0)^2 / [p^2 + m_{\text{phys}}^2 + \Sigma(p)^*]^2 , \quad (7.16)$$

$$\zeta^T(p) \equiv (-1, -e^{p^0\beta}, -e^{p^0\beta}, -1) . \quad (7.17)$$

La solution de l'équation passe par la recherche des modes zéro du noyau  $1 - \mathcal{M}\mathcal{F}$ . A la limite où le moment externe s'annule, le comportement dominant vient de la contribution des pôles pincés, ce qui permet de simplifier encore la matrice  $\mathcal{F}$ , en éliminant les montants ne générant pas de pôles pincés.

Une série de calculs permet de réduire l'équation intégrale pour le vertex effectif, à une composante. La viscosité s'exprime enfin par :

$$\eta = \frac{\beta}{10} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} z_\pi^T(k) \bar{w}(k) n(k^0) S_{free}(k) \frac{\mathcal{D}_\pi(k)}{\Sigma_I(k)}$$

où  $\bar{w}(k) = u(-k)$  et  $S_{free}(k)$  le propagateur coupé avec une densité  $\rho$  libre, soit :

$$\eta = \frac{\beta}{10} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} I_\pi(k) n(k^0) S_{free}(k) \frac{\mathcal{D}_\pi(k)}{\Sigma_I(k)} \quad (7.18)$$

Il faut maintenant déterminer  $\eta$  numériquement. Les formules explicites sont présentées dans l'annexe E.

## 7.2 Résultats numériques

Nous avons vu dans le chapitre 1 que les coefficients de diffusion sont proportionnels à  $\bar{u}l$ , et que la viscosité  $\eta$  est homogène à un coefficient de diffusion multiplié par la densité. Dans le cas relativiste, cette densité est l'enthalpie par unité de volume,  $\langle \epsilon + P \rangle$ . Connaissant la section efficace  $\sigma$  et la densité de particules  $n$ , on peut en déduire le libre parcours moyen  $l$  qui varie en  $1/n\sigma$ . A l'ordre le plus bas, en théorie  $\lambda\phi^4$ , la section efficace varie en  $\lambda^2/s$  où  $s$  est le carré de l'énergie disponible dans le centre de masse. À haute température, la seule échelle de masse dominante est la température donc la viscosité varie en  $T^3/\lambda^2$ .

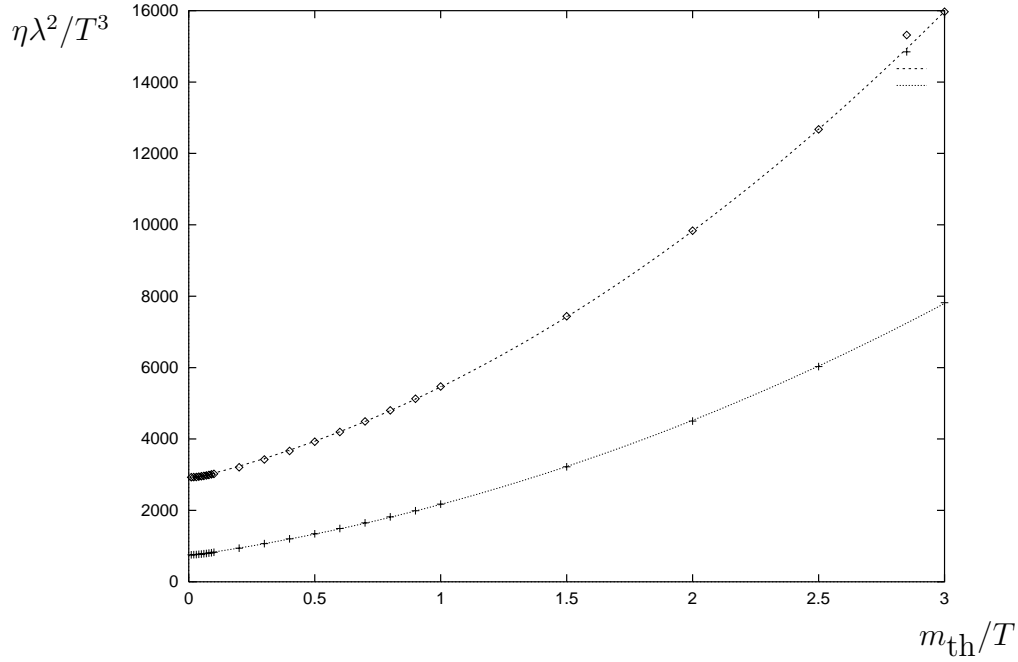


FIG. 7.3: Résultats numériques pour la viscosité de cisaillement. La courbe du bas représente le calcul à une boucle.  $m_{th}$  est la masse thermique contenant les corrections d'ordre  $T$ .

Cette courbe est obtenue par intégration de la fonction  $\mathcal{D}_{shear}$  (Annexe E). Comme on l'avait prédit, la viscosité augmente avec la masse, c'est-à-dire avec la température. La valeur de la viscosité calculée avec la resommation est, dans la limite haute température, quatre fois plus grande que celle donnée par le calcul à une boucle.

## 7.3 Méthode de U.Heinz

Une autre approche du calcul de la viscosité de cisaillement en théorie des champs  $\lambda\phi^4$  a été étudiée [26]. Le point de départ est le même, c'est-à-dire la formule de Kubo, mais la resommation des graphes se fait en utilisant une version à temps réel de l'équation de Bethe-Salpeter (*fig. 2.5*) pour des fonctions de Green à quatre points, dans le formalisme CTP (Close Time Path).

### 7.3.1 Le formalisme CTP

Ce formalisme permet de décrire un système hors équilibre à partir des fonctions de Green. Ces fonctions de Green hors équilibre sont définies par la valeur moyenne sur l'espace des phases

accessible au système [25, 21] :

$$G_p(x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^{n-1} < T_p[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] > \quad (7.19)$$

où  $T_p$  est le produit qui ordonne en fonction des arguments temporels sur le contour suivant :

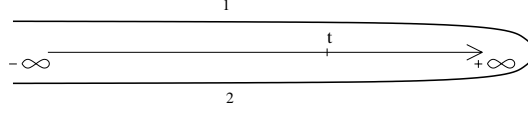


FIG. 7.4: Contour du formalisme CTP.

Notons que l'origine physique d'un contour pour la définition des fonctions de Green hors équilibre est totalement différente de celle concernant la définition des fonctions de Green à température finie. Néanmoins, on constate en pratique que ce contour d'intégration ressemble au contour du formalisme à temps réel lorsque  $\sigma = 0$  (voir appendice C). Sur la partie supérieure du contour, le  $T_p$  représentera ainsi le produit chronologique habituel alors que sur la partie inférieure, il correspondra au produit antichronologique.

Il existe également une autre version du formalisme CTP où l'on ne parcourt l'axe temporel qu'une seule fois (single-time). On est ainsi amené à préciser la nature des champs : de type 1 pour la partie supérieure et de type 2 pour la partie inférieure, et à redéfinir la fonction de Green comme :

$$G_{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^{n-1} < T_p[\phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n)] > \quad (7.20)$$

où les  $a_i = 1, 2$ . Enfin, il est possible de donner une troisième représentation des fonctions de Green à  $n$  points : c'est la représentation dite "physique" ou  $r/a$ . Elle se définit en posant  $\phi_a = \phi_1 - \phi_2$  et  $\phi_r = (\phi_1 + \phi_2)/2$  :

$$G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv (-i)^{n-1} 2^{n_r-1} < T_p[\phi_{\alpha_1}(x_1) \dots \phi_{\alpha_n}(x_n)] > \quad (7.21)$$

où les  $\alpha_i = a, r$  et  $n_r$  est le nombre d'indices valant  $r$ . Dans cette représentation, les fonctions de Green à deux points s'écrivent :

$$G_{aa}(k) = 0, G_{ar}(k) = G_A(k), G_{ra}(k) = G_R(k), G_{rr}(k) = \coth(\beta k_0/2)[G_{ra}(k) - G_A(k)],$$

ce qui permet de travailler directement avec les fonctions de Green retardées et avancées. Notons également que la dernière équation est l'équivalent du théorème fluctuation-dissipation. Par ailleurs, le fait que  $G_{aa}(k)$  soit nul se généralise : lorsque tous les indices d'une fonction de Green à  $n$  points sont égaux à  $a$ , celle-ci est nulle. Par ailleurs, lorsqu'un indice seulement est égal à  $r$  la fonction de Green est une somme de  $n - 1$  commutateurs, et on obtient des fonctions de Green complètement retardées ; lorsque tous les indices sont égaux à  $r$  la fonction de Green est une somme de  $n - 1$  anticommutateurs (reliés aux commutateurs par le FDT). Les autres fonctions de Green sont quant à elles des combinaisons de commutateurs et d'anticommutateurs. Les représentations  $r/a$  et "single-time" sont reliées par :

$$G_{a_1 \dots a_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^{(1-n/2)} G_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) Q_{a_1 \alpha_1} \dots Q_{a_n \alpha_n} \quad (7.22)$$

où l'on somme sur les indices répétés et  $Q_{a1} = -Q_{a2} = Q_{r1} = Q_{r2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### 7.3.2 Calcul de $\eta$

On considère toujours le lagrangien (7.1) en couplage faible ( $\lambda \ll 1$ ) et la formule de Kubo (7.2). La transformée de Fourier de la fonction de corrélation est  $i$  fois la composante 12 de la fonction de Green ( $\Delta_{\pi\pi}$ ) à deux points du champ  $\pi$ . Cette composante est purement imaginaire, donc on peut écrire  $\eta$  comme :  $\eta = -\frac{\beta}{20} \lim_{p^0, \vec{p} \rightarrow 0} \text{Im} \Delta_{\pi\pi}^{12}(p)$ . Et, comme le champ  $\pi$  est en réalité composé de deux champs  $\phi$  (voir équation (7.3)), on exprime  $\eta$  avec une fonction de Green à quatre points :

$$\eta = \frac{\beta}{5} \lim_{p^0, \vec{p} \rightarrow 0} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} J_{lm}(-k, p+k) \text{Im} G_{1122}(-k, p+k, q, -p-q) J^{lm}(q, -p-q) \quad (7.23)$$

Cette fonction de Green  $G_{1122}$  est solution de l'équation de Bethe-Salpeter (voir *fig. 2.5*), et lorsque l'on referme à gauche et à droite par la fonction de vertex  $J_{lm}(p, q) = p_l q_m - \frac{1}{3} \delta_{lm} \vec{p} \cdot \vec{q}$ , on obtient la somme de diagrammes en échelle identique au paragraphe précédent (*fig. 7.1*).

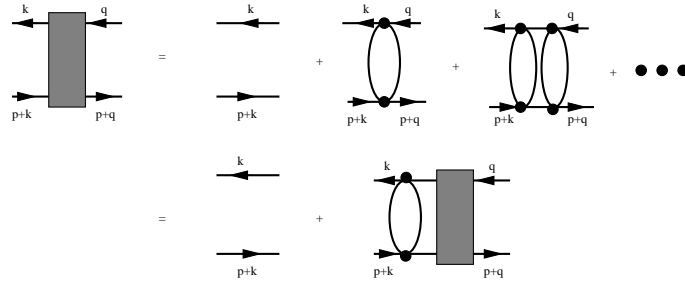


FIG. 7.5: Équation de Bethe-Salpeter pour la fonction de Green à 4 points.

La condition KMS permet d'écrire  $G_{1122} = -n(p^0)(G_{1122} + G_{2211}^*)$ , ce qui simplifie l'expression de  $G_{1122}$  en terme des représentations physiques (grâce à l'équation (7.22)), puisque l'on passe d'une somme de quinze termes, à une somme de huit termes. De plus, en utilisant le théorème de fluctuation-dissipation généralisé <sup>1</sup> [25], qui établit des relations entre les seize composantes  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}$ , il ne faut finalement que sept fonctions de Green en représentation  $r/a$  pour exprimer  $G_{1122}$  :

$$G_{1122} + G_{2211}^* = aG_{raaa} + bG_{araa} + cG_{aara} + dG_{aaar} + eG_{arra} + fG_{arar} + gG_{aarr}$$

où les coefficients  $a, \dots, g$  sont des sommes et produits de fonctions de distribution thermique  $n$  dont on trouvera les expressions, dans la limite  $p^0 \rightarrow 0$ , dans la référence [26]. Pour des raisons de symétrie, l'intégrale (7.23) sur  $k$  et  $q$  ne donnera de contribution non nulle que pour les fonctions de Green correspondant aux coefficients  $e$  et  $g$  :

$$\eta = \frac{\beta}{5} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} n(k^0) (1+n(k^0)) I_{\pi,lm}(k) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Im} \bar{G}(-k, k, q, -q) I_{\pi}^{lm}(q)$$

avec  $I_{\pi,lm}(k) \equiv -J_{lm}(-k, k) = k_l k_m - \frac{1}{3} \delta_{lm} \vec{k}^2$  et  $\bar{G} = 2G_{arra} - G_{aarr}$

Les règles de Feynman des représentations  $r/a$  [25] permettent d'écrire l'équation intégrale de Bethe-Salpeter pour  $\bar{G}$  :

<sup>1</sup>pour les fonctions de réponse non linéaire

$$\begin{aligned}
i^3 G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(-k, k, q, -q) &= [i\Delta_{\alpha_1\alpha_3}(-k)] [i\Delta_{\alpha_2\alpha_4}(k)] (2\pi)^4 \delta^4(k-q) + \\
&\frac{1}{2} [i\Delta_{\alpha_1\beta_1}(-k)] [i\Delta_{\alpha_2\gamma_1}(k)] (-i\lambda_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4})(-i\lambda_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4}) \\
&\times \int \frac{d^4s}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} [i\Delta_{\gamma_2\beta_2}(s)] [i\Delta_{\beta_3\gamma_3}(s+l-k)] [i^3 G_{\beta_4\gamma_4\alpha_3\alpha_4}(-l, l, q, -q)]
\end{aligned}$$

où  $\lambda_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} = \frac{\lambda}{4} [1 - (-1)^{n_a}]$ . Dans l'équation précédente, à la limite  $\lambda \ll 1$ , le produit  $\Delta_{ra}(k)\Delta_{ar}(k)$  introduit des pôles pincés de contribution dominante. On va donc négliger les autres produits afin de simplifier l'équation de  $\bar{G}$ . Avec cette approximation et des considérations de symétrie, l'équation de Bethe-Salpeter se découple et permet d'obtenir une équation pour la composante  $G_{aarr}$  :

$$\begin{aligned}
G_{aarr}(-k, k, q, -q) &= -\Delta_{ra}(k)\Delta_{ar}(k) \left\{ i(2\pi)^4 \delta^4(k-q) + \frac{\lambda^2}{8} \int \frac{d^4s}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} G_{aarr}(-l, l, q, -q) \right. \\
&\times \left[ \Delta_{ra}(s)\Delta_{ar}(s+l-k) + \Delta_{ar}(s)\Delta_{ra}(s+l-k) + \Delta_{rr}(s)\Delta_{rr}(s+l-k) \right. \\
&\left. \left. + N(l^0) ([\Delta_{ra}(s) - \Delta_{ar}(s)] \Delta_{rr}(s+l-k) + \Delta_{rr}(s) [\Delta_{ar}(s+l-k) - \Delta_{ra}(s+l-k)]) \right] \right\} \quad (7.24)
\end{aligned}$$

A ce stade, on introduit la fonction  $M$  obtenue en éliminant deux “pattes” extrêmes à la fonction de Green à 4 points :

$$G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}(-k, k, q, -q) = [i\Delta_{\alpha_1\beta_1}(-k)] [i\Delta_{\alpha_2\beta_2}(k)] M_{\beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4}(-k, k, q, -q)$$

Dans l'approximation des pôles pincés, l'équation (7.24) se simplifie en :

$$\begin{aligned}
\text{Im } M_{rrrr}(-k, k, q, -q) &= (2\pi)^4 \delta^4(k-q) + \frac{\lambda^2}{4} \int \frac{d^4s}{(2\pi)^4} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\rho(l) \rho(s) \rho(s+k-l)}{\text{Im } \Sigma(l)} \times \\
&\frac{[1+n(l^0)][1+n(s^0+k^0-l^0)]n(s^0)}{1+n(k^0)} \text{Im } M_{rrrr}(-l, l, q, -q),
\end{aligned}$$

avec  $\rho(k)$  la densité spectrale (définie en annexe C). On obtient ainsi pour la viscosité :

$$\eta = \frac{\beta}{10} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} n(k^0) [1+n(k^0)] I_\pi(k) \frac{\rho(k)}{\text{Im } \Sigma(k)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} I_\pi(q) \text{Im } M_{rrrr}(-k, k, q, -q)$$

ce qui correspond exactement à celle obtenue dans le premier paragraphe, en posant :

$$D_\pi(k) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} I_\pi(q) \text{Im } M_{rrrr}(-k, k, q, -q).$$

# Chapitre 8

## Modèle $\sigma$ -non linéaire

Dans ce dernier chapitre, nous allons calculer la viscosité d'un gaz de pions, en utilisant la formule de Kubo démontrée dans la première partie, et en utilisant un autre modèle de théorie des champs : le modèle  $\sigma$  non linéaire.

### 8.1 Rappels sur le modèle $\sigma$

#### 8.1.1 Modèle $\sigma$ linéaire

Le lagrangien de QCD, dans la limite où la masse des quarks est nulle, possède la symétrie chirale. Elle est brisée spontanément car la charge axiale du vide n'est pas nulle. Cela implique l'existence de particules de masse nulle, les bosons de Goldstone, qui sont les pions. En réalité la masse des pions n'est pas nulle et dans ce cas on parle de brisure explicite de la symétrie chirale. A l'échelle hadronique, les quarks sont confinés, les degrés de liberté ne sont plus les quarks et les gluons mais les baryons et les mésons [43]. Le modèle  $\sigma$  linéaire est une théorie effective de nucléons et pions qui possède les propriétés de symétrie de QCD [11]. Aux nucléons on associe un doublet de spineurs de Dirac ( $\psi_p$  et  $\psi_n$ ) qui se comporte sous une transformation chirale comme le doublet de quarks ( $\psi_u$  et  $\psi_d$ ). On écrit un lagrangien effectif chiral sous la forme d'un terme cinétique et d'un terme de masse. Pour ce dernier, on ne peut pas choisir le terme habituel d'une théorie fermionique  $\mathcal{L}_M = -M_N (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L)$  car cela briserait d'une façon très importante la symétrie axiale ( $M_N \simeq 940$  MeV). On va chercher ce terme de masse sous la forme  $\mathcal{L}_M = -g (\bar{\Psi}_L W \Psi_R + \bar{\Psi}_R W^\dagger \Psi_L)$ , où  $W$  est une matrice  $2 \times 2$  assurant l'invariance chirale du terme. On a donc,

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i\bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - g (\bar{\Psi}_L W \Psi_R + \bar{\Psi}_R W^\dagger \Psi_L). \quad (8.1)$$

Soit  $V_L$  et  $V_R$  deux transformations de  $SU(2)$ . La transformation chirale  $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$  s'écrit, pour  $\Psi_L$  et  $\Psi_R$ ,

$$\Psi_L(x) \rightarrow V_L \Psi_L(x) \text{ et } \Psi_R(x) \rightarrow V_R \Psi_R(x), \quad (8.2)$$

ce qui impose à  $W$  les lois de transformation,

$$W(x) \rightarrow V_L W(x) V_R^\dagger \quad (8.3)$$

$$W(x)^\dagger \rightarrow V_R W(x)^\dagger V_L^\dagger \quad (8.4)$$

pour que le lagrangien soit invariant chiral. On choisit alors une paramétrisation de  $W$  en termes de quatre champs réels,  $\sigma$  et  $\vec{\pi}$ ,

$$W(x) = \sigma(x) + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(x). \quad (8.5)$$

ce qui permet de réécrire  $\mathcal{L}_M$  sous la forme :

$$\mathcal{L}_M = -g \left( \bar{\Psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \frac{1+\gamma_5}{2} \Psi + \bar{\Psi}(\sigma - i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) \frac{1-\gamma_5}{2} \Psi \right) \quad (8.6)$$

$$= -g (\bar{\Psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \Psi) \quad (8.7)$$

$\sigma$  est un champ scalaire (de Lorentz), isoscalaire (pour l'isospin) et  $\vec{\pi}$  est un champ pseudo-scalaire, isovectoriel. Ainsi,  $\vec{\pi}$  s'identifie à un champ qui décrit les pions (par construction, ce champ a bien les nombres quantiques du pion).

On introduit ensuite une dynamique pour les champs  $\sigma$  et  $\vec{\pi}$ , obéissant évidemment à la même contrainte d'invariance chirale. Le lagrangien pour ces bosons comporte alors un terme cinétique ( $\frac{1}{4}\text{Tr}\partial^\mu W \partial_\mu W^\dagger$ ) et un terme potentiel  $V(\sigma, \vec{\pi})$  :

$$\mathcal{L}_B = \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - V(\sigma, \vec{\pi}). \quad (8.8)$$

Le terme potentiel  $V(\sigma, \vec{\pi})$  est tout simplement construit à partir de la combinaison invariante  $\text{Tr} WW^\dagger = \sigma^2 + \pi^2$ . De manière explicite, on prend :

$$V(\sigma, \vec{\pi}) = \pm \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 - c\sigma, \quad (8.9)$$

où  $m^2$  est un paramètre positif ou négatif, où  $\lambda$  est positif (pour des raisons de stabilité de la théorie) et où le terme  $c\sigma$  est introduit pour prendre en compte la petite brisure explicite de la symétrie chirale. La limite  $c = 0$  s'appelle la limite chirale : la symétrie chirale est alors exacte (pas explicitement brisée), c'est-à-dire que les quarks  $u$  et  $d$  n'ont pas de masse et que par conséquent, au niveau hadronique, les pions sont non massifs également.

Le lagrangien complet du modèle  $\sigma$ -linéaire est donc :

$$\mathcal{L}_{\sigma\text{-lin}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - g (\bar{\Psi}(\sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \Psi) + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{1}{2}\partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - V(\sigma, \vec{\pi}). \quad (8.10)$$

On peut remarquer qu'il s'agit d'une généralisation vectorielle du modèle  $\lambda\phi^4$ , possédant la symétrie  $O(4)$  et pour laquelle on introduit une brisure explicite sur une composante.

Nous avons choisi un terme quadratique de la forme,  $\pm \frac{m^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2)$  pour tenir compte des deux secteurs du modèle. En effet, si nous prenons  $-m^2$ , le contenu physique du lagrangien nous indique que la symétrie chirale est spontanément brisée. Si on représente le terme de potentiel  $V(\sigma, \pi)$  (figure 8.1 où on a choisi de ne représenter qu'une dimension de  $\vec{\pi}$  pour pouvoir faire une figure en trois dimensions), on constate qu'il a la forme d'un "chapeau mexicain". D'après la forme du potentiel, deux types de modes (donc de particules) vont être observables. Le premier mode est une oscillation autour d'un des minima du potentiel, par exemple, autour du point  $A$  de coordonnées  $(v = \frac{m}{\sqrt{\lambda}})$ . Il s'agit (par convention) d'un mode décrit par le champ  $\sigma$  de valeur moyenne dans le vide (le condensat  $\langle \sigma \rangle$ ) non-nulle, notée  $v$ . Lorsque l'on quantifie ces petites oscillations autour de  $A$ , on a un mode massif car en première approximation, ce mode est dans un potentiel quadratique. Le deuxième mode est le mode orthogonal au précédent (direction de l'axe  $\pi$  au point  $A$ ), c'est-à-dire qu'il se déplace dans le cercle chirale (ensemble des minima du potentiel). Le potentiel qu'il subit ne contient pas de termes quadratiques. Par conséquent, il est non massif : c'est un boson dit de Goldstone ou mode mou. On voit donc que globalement, la théorie contient deux types de particules, un boson massif, le  $\sigma$  et un boson de masse nulle, le pion.

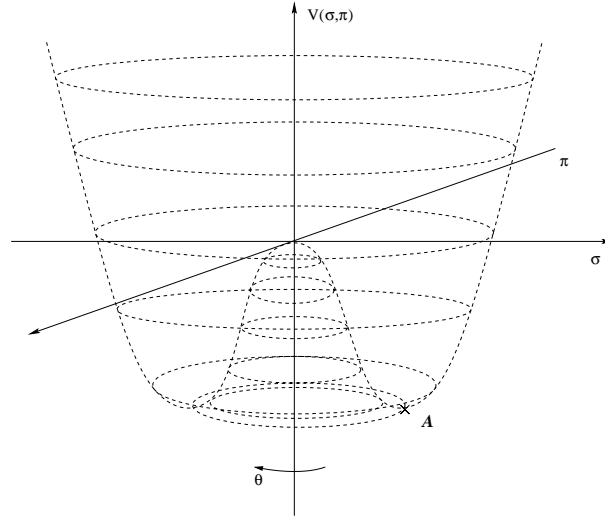


FIG. 8.1: Potentiel  $V(\sigma, \pi)$  dit en “chapeau mexicain” du modèle  $\sigma$ -linéaire . On a choisi par convention de faire un développement autour du point  $A = (v, 0)$  avec  $v = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ , c’est-à-dire de considérer une valeur moyenne dans le vide du champ  $\sigma$  non-nulle et une valeur moyenne du champ de pion nulle.

Si l’on considère maintenant la cas  $+m^2$ , la symétrie chirale est satisfaite. On dit que l’on est dans la phase où la symétrie est restaurée, le potentiel effectif ne possédant plus qu’un seul minimum correspondant à  $\langle \sigma \rangle = \langle \pi \rangle = 0$ . Le vide possède la même symétrie que le hamiltonien, qui est réalisée “à la Wigner” et les deux modes  $\sigma$  et  $\vec{\pi}$  sont massifs. Le nucléon, par contre, a une masse nulle. Ce secteur du modèle n’a aucun rapport avec la réalité.

Le paramètre d’ordre de la transition de phase chirale est donc la valeur moyenne de  $\sigma$  (que l’on identifie au condensat de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ ). On introduit alors le champ fluctuant  $s$  défini par

$$\sigma \equiv s + \langle \sigma \rangle = s + v. \quad (8.11)$$

En effectuant ce changement de variable dans le lagrangien (8.10), on obtient immédiatement le spectre des particules : les pions de masse nulle ( $m_\pi^2 = 0$ ), le sigma massif ( $m_\sigma^2 = 2\lambda v^2$ ) et le nucléon qui acquiert une masse finie ( $M_N = gv$ ). Afin que cette théorie effective rende compte de la réalité, il faut inclure la brisure explicite de la symétrie chirale (le pion acquiert une masse) et fixer les paramètres (la phénoménologie impose que  $\langle \sigma \rangle = f_\pi$ ).

### 8.1.2 Modèle $\sigma$ non linéaire

A basse température, seules contribuent les excitations thermiques associées aux particules les plus légères, à savoir les pions. Le modèle  $\sigma$  linéaire décrit précédemment traite du domaine d’énergie au voisinage de la transition de phase chirale. Pour obtenir un modèle ne traitant que des pions on fait tendre le paramètre  $\lambda$  du modèle  $\sigma$  linéaire vers l’infini. Ceci a pour conséquence d’éliminer le méson sigma dont la masse tend aussi vers l’infini. Le système évolue sur le cercle chirale et on élimine le champ  $\sigma$  par la contrainte non linéaire :

$$\sigma^2 + \vec{\pi}^2 = f_\pi^2. \quad (8.12)$$



La matrice  $W$  s'exprime alors en terme d'une matrice unitaire définie par  $W = f_\pi \Sigma$  (et  $\Sigma \Sigma^\dagger = 1$ ) et le lagrangien du modèle  $\sigma$  non linéaire (limité au secteur mésonique) s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} \partial^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger + \frac{f_\pi^2 m_\pi^2}{4} \text{Tr}(\Sigma + \Sigma^\dagger). \quad (8.13)$$

Ce lagrangien constitue le premier terme d'un lagrangien de perturbations chirales. C'est une copie exacte de QCD dans le domaine des basses énergies [12].

Revenons maintenant au modèle hydrodynamique développé au chapitre 4. Les variables hydrodynamiques rendant compte de la brisure de symétrie ont été introduites sous la forme d'une matrice unitaire  $\Sigma$ . Le système d'équations hydrodynamiques (4.19) à (4.21) est constitué des équations d'évolution du nombre baryonique, du tenseur énergie-impulsion, des charges gauches et droites et de  $\Sigma$ . L'équation du second ordre régissant l'évolution de cette dernière variable est :

$$i \partial_\mu ((f_t^2 - f_s^2) u^\mu u^\nu \Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger + f_s^2 \Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) + [u^\mu \Sigma \partial_\mu \Sigma^\dagger, \alpha] = 0.$$

Si l'on pose  $\alpha = 0$  (absence de nucléons), ce qui correspond à une solution particulière de l'équation (4.20), et que l'on considère  $f_t, f_s$  et  $u^\mu$  comme constants alors cette équation devient :

$$(f_t^2 - f_s^2) u^\mu u^\nu \partial_\mu (\Sigma \partial_\nu \Sigma^\dagger) + f_s^2 \partial_\mu (\Sigma \partial^\mu \Sigma^\dagger) = 0.$$

Soit, dans le référentiel au repos :

$$f_t^2 \partial_t (\Sigma \partial_t \Sigma^\dagger) - f_s^2 \partial_i (\Sigma \partial^i \Sigma^\dagger) = 0$$

qui coïncide avec l'équation du mouvement du modèle sigma non linéaire avec un lagrangien contenant deux constantes de désintégration,  $f_t$  et  $f_s$  ! Ceci est possible à cause de la brisure de l'invariance de Lorentz due à la température et au potentiel chimique finis. Il y a néanmoins une autre différence avec le lagrangien (8.13), c'est l'absence de terme de masse. En effet le modèle du chapitre 4 a été développé dans la limite chirale (la masse des quarks et donc des pions est nulle). En toute rigueur, à cause de la brisure explicite, il faudrait donc ajouter un terme de masse  $-(f_t^2 m_\pi^2/4) \text{Tr}(\Sigma + \Sigma^\dagger)$  dans le hamiltonien. Dans ce cas, l'équation d'évolution du  $\Sigma$  ainsi que les expressions de la pression et de la densité d'énergie seraient légèrement modifiées. Les pions ne sont pas de vrais modes de Goldstone et donc ne sont pas non plus de vrais modes hydrodynamiques au sens strict du terme. Cependant, la masse des quarks étant faible, on peut considérer, en première approximation, que les pions sont "quasiment" des modes hydrodynamiques. Dit autrement, on suppose qu'il existe un régime intermédiaire dans lequel les pions, bien que massifs, continuent d'être les variables pertinentes de notre description hydrodynamique [8].

Dans la suite, afin de simplifier notre approche, nous considérerons donc une seule constante de désintégration  $f_\pi$ , comme dans le chapitre 5, et que la masse des pions n'affecte pas leur caractère de modes hydrodynamiques.

La matrice  $\Sigma$  s'exprime en fonction de trois champs de pions canoniques  $\vec{\phi}$  [12] :

$$\Sigma = \exp \left( i \vec{\tau} \cdot \frac{\vec{\phi}}{f_\pi} \frac{F(X)}{X} \right), \quad X = \sqrt{\frac{\vec{\phi} \cdot \vec{\phi}}{f_\pi^2}},$$

avec  $F(X) = X + \alpha X^3 + \alpha' X^5 + \dots$ , les champs mésoniques du modèle sigma linéaire pouvant s'exprimer avec ces nouvelles variables :  $\sigma = f_\pi \cos[F(X)]$ ,  $\vec{\pi} = \vec{\phi} \sin[F(X)]/X$ .

À l'ordre quatre dans le champ de pion, le lagrangien du modèle sigma non linéaire devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} + \frac{1}{f_\pi^2} \left[ -m_\pi^2 \left( \alpha - \frac{1}{24} \right) (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi})^2 \right. \\ & \left. + \left( \alpha - \frac{1}{6} \right) \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + \left( 2\alpha + \frac{1}{6} \right) (\vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi})^2 \right]. \end{aligned}$$

Différents choix existent pour la valeur de  $\alpha$  mais évidemment les observables ne doivent pas en dépendre. Dans ce travail, nous allons faire le choix  $\alpha = 1/6$  qui correspond à  $\vec{\pi} = \vec{\phi}$ . Le lagrangien ainsi obtenu est identique à celui du modèle du champ scalaire  $\lambda\phi^4$ , où le champ est un vecteur à trois composantes scalaires et où la constante de couplage  $\lambda = 3m_\pi^2/f_\pi^2$ . La seule différence réside en fait dans la présence d'un terme d'interaction supplémentaire, le couplage dérivatif  $(\vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi})(\vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi})/2f_\pi^2$ . Comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, ce terme joue un rôle important dans le calcul de la viscosité.

## 8.2 Expression de la viscosité

Dans le paragraphe précédent nous avons choisi un modèle de théorie des champs pour décrire les pions. Il s'agit maintenant de calculer la viscosité de cisaillement qui est donnée par la formule :

$$\eta = \frac{\beta}{20} \lim_{p^0 \rightarrow 0} \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{0}} \int d^4x e^{ip \cdot x} \frac{1}{3} \langle \pi_{ij}(x) \pi^{ij}(0) \rangle. \quad (8.14)$$

Le coefficient devant la fonction de corrélation rend compte de l'isospin. En effet, dans les équations hydrodynamiques, la viscosité pour les pions correspond à trois fois la viscosité du champ scalaire. Calculons maintenant le tenseur énergie-impulsion correspondant au lagrangien choisi. En théorie des champs [44], ce tenseur est le courant de Noether associé à une translation dans l'espace-temps :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \vec{\pi})} \cdot \partial^\nu \vec{\pi} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\nu \vec{\pi} + \frac{1}{f_\pi^2} \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} \vec{\pi} \cdot \partial^\nu \vec{\pi} - g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} (\partial^\rho \vec{\pi})^2 - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\pi}^2 - \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} \vec{\pi}^4 + \frac{1}{2f_\pi^2} (\vec{\pi} \cdot \partial^\rho \vec{\pi})^2 \right]. \end{aligned}$$

La partie spatiale et sans trace de ce tenseur est donc :

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &\equiv T^{ij} - \frac{1}{3} T_k^k \delta^{ij} \\ &= (\partial^k \vec{\pi} \cdot \partial^l \vec{\pi} + \frac{1}{f_\pi^2} \vec{\pi} \cdot \partial^k \vec{\pi} \vec{\pi} \cdot \partial^l \vec{\pi}) (\delta^{ik} \delta^{jl} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta^{kl}). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Nous voyons tout de suite une conséquence du couplage dérivatif propre au modèle sigma non linéaire. En effet en plus du terme venant de la partie cinétique du lagrangien, identique à celui du champ scalaire, il y a un terme de couplage à quatre pions. Il s'agit maintenant d'injecter l'équation (8.15) dans l'expression de la viscosité (8.14), et d'effectuer la transformée de Fourier sur chaque champ. Rappelons que pour le modèle  $\lambda\phi^4$ , la fonction de corrélation pouvait s'exprimer en fonction de la partie imaginaire d'une fonction de Green à quatre points [46] :

$$\eta = \frac{\beta}{20} \lim_{p^0 \rightarrow 0} \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{0}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \{ -4J_{ij}(k, p-k) \text{Im} G_{1122}(k, p-k, q, -p-q) J^{ij}(q, p+q) \}$$

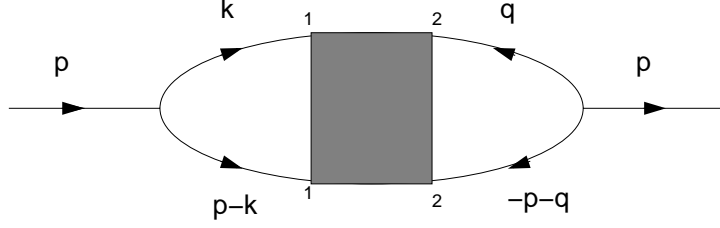


FIG. 8.2: Représentation diagrammatique de la fonction de Green à quatre champs.

avec  $J^{ij}(p, q) = p^i q^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} \vec{p} \cdot \vec{q}$  et où  $G_{1122}(k, p-k, q, -p-q)$  est la transformée de Fourier de la fonction de Green à quatre champs  $\phi$  définie par :

$$G_{a_1 a_2 a_3 a_4}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-i)^3 \langle T_p [\phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) \phi_{a_3}(x_3) \phi_{a_4}(x_4)] \rangle.$$

Dans le cas de la fonction de corrélation de  $\pi_{ij}$  pour  $\lambda\phi^4$ , c'est une quantité purement imaginaire dans l'espace des moments (voir réf. [46]). Cette fonction de Green est également présente (avec un coefficient pour l'isospin) lorsque l'on effectue le calcul pour les pions. Le couplage dérivatif implique cependant la présence de trois termes supplémentaires correspondant à deux fonctions de Green à six points et une fonction de Green à huit points :

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{\beta}{20} \lim_{p^0 \rightarrow 0} \lim_{\vec{p} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{3} \sum_{a,b,c,d=1,2,3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \{ 4i J_{ij}(k, p-k) \\ & \times G_{1122}^{aabb}(k, p-k, q, -p-q) J^{ij}(q, p+q) - \frac{2i \times 4!}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} [J_{ij}(k, p-k) \\ & \times G_{112222}^{aacdd}(k, p-k, q, -p-q-k'-k'', k', k'') J^{ij}(q, p+q+k'+k'') + J_{ij}(k, p-k-k'-k'') \\ & \times G_{111122}^{aabbcc}(k'', k, k', p-k'-k-k'', q, -p-q) J^{ij}(q, p+q)] \\ & + i \frac{4! \times 4!}{f_\pi^4} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q'}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q''}{(2\pi)^4} J_{ij}(k, p-k'-k'-k'') \\ & \times G_{11112222}^{aabbccdd}(k'', k, k', p-k-k'-k'', q', q, q'', -p-q-q'-q'') J^{ij}(q, p+q+q'+q'') \} \quad (8.16) \end{aligned}$$

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que l'étape suivante était de calculer la fonction de Green à l'aide d'une équation intégrale afin de resommer une infinité de graphes (7.1). Ainsi que nous l'avons alors expliqué, les raisons de la prise en compte de tous ces graphes étaient propres au modèle  $\lambda\phi^4$  dans la limite du couplage faible. Pour le modèle sigma non linéaire, les mêmes arguments ne s'appliquent pas et nous allons simplement factoriser les fonctions de Green en produits de propagateurs. On peut penser que cette approximation n'est certainement pas satisfaisante en vue d'obtenir des valeurs numériques extrêmement précises pour la viscosité elle-même mais on peut montrer (cf. paragraphe suivant) qu'elle donne des résultats tout à fait compatibles avec d'autres approches. À nouveau, cela vient du fait que le graphe en échelle n'est pas dominant dans la théorie.

Le premier terme de l'équation (8.16) au plus bas ordre est bien entendu la boucle représentée sur la figure 8.3 ci-dessous.

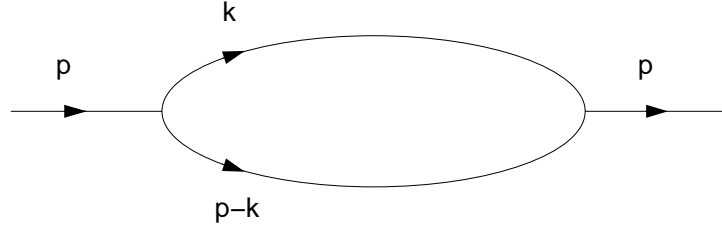


FIG. 8.3: Représentation diagrammatique de la fonction de Green à quatre champs.

Pour la fonction de Green à six points, par contre, nous effectuons la factorisation représentée sur la figure 8.4, c'est-à-dire un graphe à une boucle avec une correction de vertex. Le dernier terme, quant à lui, est au minimum un graphe à trois boucles et sera donc négligé.

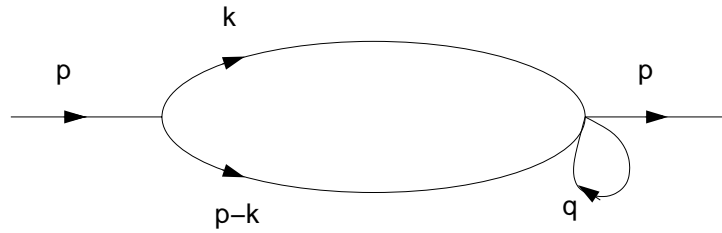


FIG. 8.4: Représentation diagrammatique de la fonction de Green à six champs.

A l'aide du théorème de Wick et en tenant compte des sommations sur l'isospin, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\beta}{20} \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ [6J_{ij}^2(k, -k) \times (-i)^2 G_{12}(k) G_{12}(-k)] \right. \\ &\quad \left. + \frac{120}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} [J_{ij}^2(k, -k) \times (-i)^2 G_{12}(k) G_{12}(-k) G_{11}(k')] \right\}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

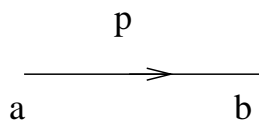
On obtient bien ainsi les deux termes à une et deux boucles représentés sur les figures 8.3 et 8.4, que nous allons maintenant calculer.

### 8.3 Calculs à deux boucles

À l'aide du formalisme des intégrales de chemin par exemple [45], nous pouvons établir des règles de Feynman pour le lagrangien choisi ( $\alpha = 1/6$ ) :

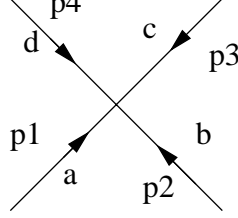
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\rho \vec{\pi})^2 - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\pi}^2 - \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} \vec{\pi}^4 + \frac{1}{2f_\pi^2} (\vec{\pi} \cdot \partial^\rho \vec{\pi})^2.$$

Propagateur du pion :



$$iG_F(p)\delta_{ab} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i\delta_{ab}}{p^2 - m_\pi^2 + i\epsilon} \quad (8.18)$$

Vertex à quatre pions (couplage  $\vec{\pi}^4$  et dérivatif) :



$$\frac{-im_\pi^2}{f_\pi^2} \delta^4 \left( \sum_i p_i \right) (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \quad (8.19)$$

$$\frac{-i}{f_\pi^2} \delta^4 \left( \sum_i p_i \right) [\delta_{ab}\delta_{cd}(p_1 + p_2)(p_3 + p_4) + \delta_{ac}\delta_{bd}(p_1 + p_3)(p_2 + p_4) + \delta_{ad}\delta_{bc}(p_1 + p_4)(p_2 + p_3)] \quad (8.20)$$

### 8.3.1 Calcul à une boucle

La contribution à  $\eta$  apportée par la boucle représentée sur la figure 8.3 se calcule directement à partir de la théorie des champs à température finie (car les propagateurs du formalisme CTP sont équivalents dans ce cas, voir Annexe C) ou à l'aide des règles de coupure (Annexe D) :

$$\eta^{one\ loop} = \frac{\beta}{20} \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \{ 6 J_{ij}^2(k, -k) \times (-i)^2 G_{12}(k) G_{12}(-k) \}$$

avec  $J^{ij}(k, -k) = -k^i k^j + \frac{1}{3} \delta^{ij} \vec{k}^2$ . Dans le cadre du formalisme à temps réel, les propagateurs  $G_{21}$  et  $G_{12}$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$G_{21}(k) = -i [1 + n(k_0)] \rho(k) \quad (8.21)$$

$$G_{12}(k) = -i n(k_0) \rho(k) \quad (8.22)$$

où  $n(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}$  est la distribution de Bose-Einstein et où  $\rho(k)$  est la densité spectrale. On constate directement par un calcul simple que  $G_{12}(-k) = G_{21}(k)$ . Cela nous permet alors d'écrire la viscosité sous la forme :

$$\eta^{one\ loop} = \frac{\beta}{20} \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left\{ 6 \frac{2}{3} \vec{k}^4 n(k_0) [1 + n(k_0)] \rho(k)^2 \right\}.$$

La seule quantité inconnue est donc maintenant la densité spectrale. Si l'on appelle  $\Sigma(k)$  la self-énergie retardée, celle-ci s'écrit explicitement :

$$\rho(k) = \frac{2\text{Im}\Sigma(k)}{(k^2 - m_\pi^2 - \text{Re}\Sigma(k))^2 + (\text{Im}\Sigma(k))^2}$$

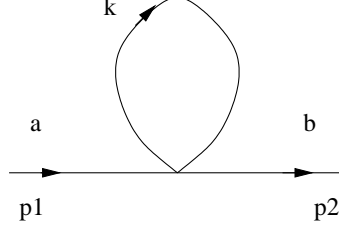


FIG. 8.5: Correction thermique de la masse

Dans le cadre de l'approximation des quasiparticules [23, 33, 50], on obtient au premier ordre en  $\Gamma_k/E_k$  ( $\Gamma_k \equiv \frac{\text{Im}\Sigma(k)}{2E_k}$  est la largeur et  $E_k^2 \equiv \vec{k}^2 + m_\pi^2 + \text{Re}\Sigma(k)$  est l'énergie des quasiparticules) :

$$\rho(k)^2 \simeq \text{sgn}(k_0) 2\pi \delta(k_0^2 - E_k^2) \rho(k) = \text{sgn}(E_k) 2\pi \delta(k_0^2 - E_k^2) \frac{2}{\text{Im}\Sigma(k)}.$$

L'intégration sur  $k_0$  aboutit alors à :

$$\begin{aligned} \eta^{one\ loop} &= \frac{\beta}{30} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} n(E_k) [1 + n(E_k)] \frac{\vec{k}^4}{E_k^2 \Gamma_k} \\ &= \frac{\beta}{60\pi^2} \int d|\vec{k}| n(E_k) [1 + n(E_k)] \frac{\vec{k}^6}{E_k^2 \Gamma_k}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Cette expression correspond exactement à la formule (7.18) du chapitre précédent avec  $\mathcal{D}_\pi(k) = I_\pi(k)$  ou encore celle de l'annexe E avec  $\mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) = \vec{k}^2$  (E.2). La seule différence par rapport à la théorie scalaire  $\lambda\Phi^4$  se situe donc, à ce stade du calcul, au niveau de la largeur  $\Gamma_k$ . Cependant, comme avons déjà vu (cf. (8.17)), les couplages dérivatifs généraient d'autres termes correctifs. Nous allons maintenant les calculer explicitement.

### 8.3.2 Calcul à deux boucles

Le deuxième terme de l'équation (8.17) correspond au calcul précédent à une boucle, multiplié par une correction thermique de la masse (partie réelle de la self-énergie du pion). Cette correction thermique représentée sur la figure 8.5 se calcule avec les règles de Feynman et la partie thermique du propagateur à température finie (voir annexe C) :

$$G_{11}(k) = -2i\pi n(|k_0|) \delta(k^2 - m^2).$$

Ce graphe induit une correction sur la masse des pions à l'ordre  $T^2$ . De manière explicite, le couplage à quatre pions contribue pour un facteur  $m_\pi^2 T^2 / 8f_\pi^2$  (8.19) et le couplage dérivatif (8.20) pour  $-p^2 T^2 / 12f_\pi^2$  (avec  $p^2 = m_\pi^2$ ). Soit, globalement :

$$\frac{m_\pi^2(T)}{m_\pi^2} = 1 + \frac{T^2}{24f_\pi^2}. \quad (8.24)$$

Nous pouvons donc écrire maintenant l'expression de la viscosité cherchée (calcul "à deux boucles") :

$$\eta^{two\ loops} = \frac{\beta}{60\pi^2} \int d|\vec{k}| n(E_k) [1 + n(E_k)] \frac{\vec{k}^6}{E_k^2 \Gamma_k} \left( 1 + \frac{5 m_\pi^2 T^2}{6 f_\pi^4} \right). \quad (8.25)$$

La seule inconnue est la largeur  $\Gamma_k$  ou de manière équivalente la partie imaginaire de la self-énergie. Dans le modèle  $\lambda\phi^4$ , la première contribution non nulle à la partie imaginaire est celle de la self-énergie à deux boucles (“sunset diagram”) et peut être calculée analytiquement à un certain ordre dans la constante de couplage ou numériquement [23, 48]. Pour le gaz de pions, nous avons choisi d’utiliser la référence [49] dans laquelle la largeur des pions est reliée, *via* le théorème optique, à l’amplitude de diffusion pion-pion. Cette amplitude étant elle-même paramétrée dans [49], nous avons utilisé en pratique les valeurs numériques. Il ne reste donc plus qu’à calculer explicitement la viscosité  $\eta$ .

## 8.4 Résultats numériques

Voyons maintenant les valeurs numériques obtenues pour la viscosité. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la largeur est directement prise de la référence [49]. Sur la figure (8.6), on a représenté les contributions à une (tirets) et deux boucles (trait plein).

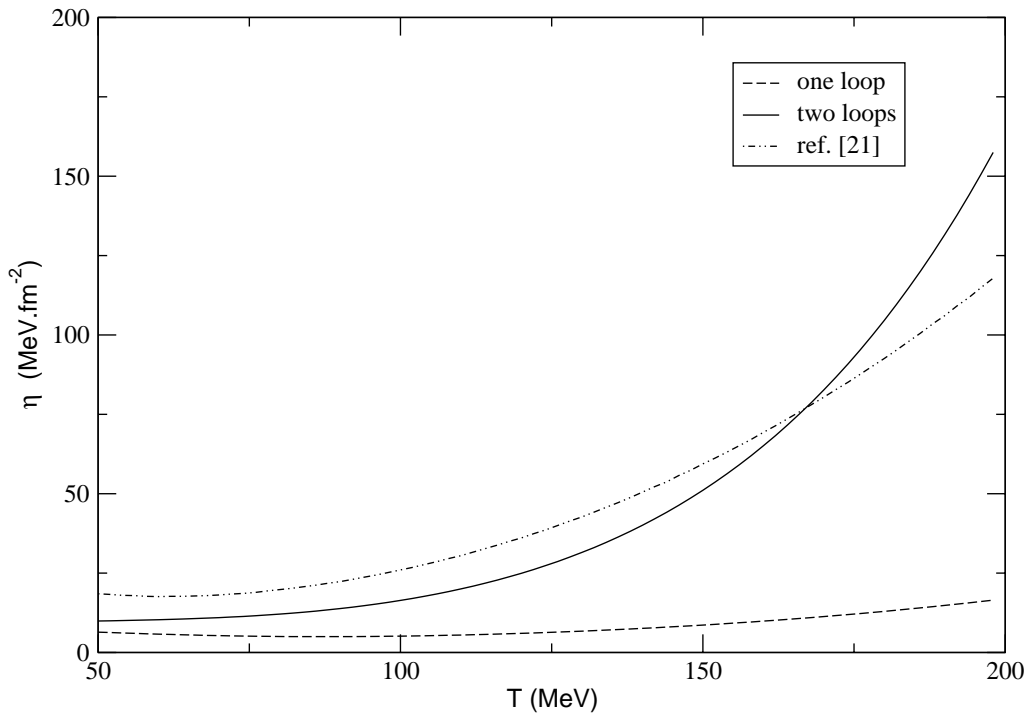


FIG. 8.6: Résultats numériques pour la viscosité de cisaillement d’un gaz de pions.

La comparaison entre ces deux courbes montre l’importance de la correction de vertex, c’est-à-dire de la fonction de Green à six points dans le calcul de la viscosité. Constatant cela, il serait légitime de se demander si la fonction de Green à huit points ne contribue pas, elle aussi, de manière significative. Cependant le problème est un peu différent. En effet, prendre en compte la

fonction de Green à huit points signifierait en réalité prendre en compte explicitement des graphes à deux boucles. Or, il existe d'autres contributions à deux boucles provenant des fonctions de Green à quatre (comme dans la théorie  $\lambda\Phi^4$ ) et six points. Il ne serait donc pas correct, du point de vue de la cohérence du traitement, de considérer uniquement la fonction de Green à huit points.

Nous avons également reporté sur la figure 8.6 les résultats obtenus dans une autre approche (équation de Boltzmann) [21]. Nous constatons que notre résultat (courbe en trait plein) lui est directement comparable : les deux courbes ont le même comportement croissant, se croisent pour une température  $T \simeq 160$  MeV et diffèrent l'une de l'autre d'environ 30% dans le domaine des basses et hautes températures. Étant données les approximations faites dans ce travail d'une part, nous pouvons conclure que notre approche est non seulement compatible avec celle mentionnée ici [21] mais également avec les autres calculs de viscosité de gaz de pions de la littérature [42, 51, 52].

La théorie cinétique et l'équation de Boltzmann sont traditionnellement utilisées pour calculer les propriétés de transport d'un système de particules que l'on peut traiter classiquement (excepté durant de brèves collisions). Quand le système est à l'équilibre local, et évolue vers l'équilibre global, on peut déterminer une solution de l'équation *via* le développement de Chapman-Enskog et ainsi obtenir une formule pour  $\eta$  [21]. La physique statistique hors équilibre, quant à elle, permet d'obtenir *via* la théorie de la réponse linéaire une formule de Kubo pour  $\eta$  qui est une fonction de corrélation. La validité de l'équation de Boltzmann est *a priori* plus réduite que l'hydrodynamique en général : elle concerne uniquement la physique des systèmes dilués où les collisions sont rares et violentes. Mais dans ce cas précis, il doit être normalement possible de comprendre pourquoi les deux approches conduisent à des résultats similaires. En fait, on peut montrer que les ingrédients physiques nécessaires à la description d'un système dans l'approche boltzmannienne et dans notre approche sont essentiellement les mêmes et conduisent formellement aux mêmes équations intégrales pour le calcul de la viscosité [24]. D'un côté nous avons en effet la section efficace pion-pion (dans le terme de collision) et de l'autre l'amplitude de diffusion pion-pion (dans la largeur). En fait, de nouveau, la "seule" différence provient du domaine de validité des deux approches. Le domaine de validité de l'équation de Boltzmann est plus restrictif du côté des hautes températures (le libre parcours moyen doit être supérieur à la longueur d'onde de Compton) et donc près de la transition de phase. Donc *a priori*, même si des améliorations peuvent encore être apportées au calcul, notre approche *via* les fonctions de corrélations semble être la meilleure et la plus prometteuse lorsque l'on approche la transition de phase (même si dans ce cas, ainsi que nous l'avons déjà mentionné, les fluctuations du paramètre d'ordre doivent être incorporées).





# Conclusion

Dans une première partie, nous avons rappelé des éléments d’hydrodynamique nécessaires à notre étude, à savoir la définition des modes hydrodynamiques et des coefficients de transport. Dans un fluide normal, les modes hydrodynamiques sont associés aux quantités conservées, dont les équations d’évolution permettent une description complète du système. En présence d’une brisure de symétrie, comme dans le superfluide, un nouveau mode hydrodynamique apparaît, le mode de Goldstone auquel on associe une variable dont l’équation d’évolution complète le système d’équations hydrodynamiques. Nous avons également vu comment la théorie de la réponse linéaire permettait d’obtenir les formules de Kubo, formules qui expriment par exemple la viscosité en fonction des limites basse fréquence et grande longueur d’onde de la fonction de corrélation du tenseur des contraintes.

Nous nous sommes ensuite intéressés, dans la deuxième partie, à la symétrie chirale  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , qui est spontanément brisée lorsque les quarks sont confinés à l’intérieur des hadrons. Les modes de Goldstone associés à cette brisure de symétrie sont les pions, particules produites en grande quantité dans les collisions d’ions lourds. Or, pour décrire le gaz de pions, on utilise généralement les équations d’un fluide parfait, c’est-à-dire sans tenir compte de la brisure de la symétrie chirale ou de la dissipation. Nous avons par conséquent évalué dans le cadre simplifié de la géométrie de Bjorken, les effets de ces deux “corrections” au fluide parfait sur le profil d’évolution de la température. Tandis que la modification des équations due à la prise en compte de la brisure de symétrie introduit un effet négligeable, la présence de dissipation via la viscosité de cisaillement apparaît importante pour une description correcte de l’évolution hydrodynamique du gaz de pions. Nous avons ensuite établi les équations hydrodynamiques d’un fluide chiral en présence de dissipation et mis en évidence les nombreux nouveaux coefficients de transport mis en jeu dans une telle description.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons regardé comment nous pouvions calculer la viscosité de cisaillement d’après la formule de Kubo, issue de la théorie microscopique, qui exprime ce coefficient de transport par la fonction de corrélation du tenseur des contraintes. Pour cela, nous avons rappelé le calcul de cette fonction de corrélation dans le cadre de la théorie quantique des champs pour un champ scalaire en auto-interaction par deux méthodes distinctes. La première consiste à déterminer dans un premier temps les classes de diagrammes contribuant à la viscosité puis à les resommer à l’aide des règles de coupure à température finie. La seconde, quant à elle, est fondée sur une approche type problème à  $N$  corps en passant par la résolution de l’équation de Bethe-Salpeter. Ces deux approches [24, 26] sont bien évidemment équivalentes. Pour pouvoir appliquer l’exemple fourni par la théorie  $\lambda\phi^4$  au calcul de la viscosité du gaz de pions, nous avons choisi un modèle  $\sigma$  non linéaire. Le couplage dérivatif inhérent au modèle introduit des fonctions de Green à six et huit champs au lieu de quatre pour le modèle  $\lambda\phi^4$ . Les fonctions de Green à six points ont été calculées en tant que correction de vertex et celle à huit champs a été négligée. L’effet de la correction de vertex s’est avéré important au niveau quantitatif et a permis d’obtenir des résultats

comparables à ceux qui avaient été obtenus dans le cadre d'une autre approche (équation de Boltzmann). Bien sûr, de nombreuses améliorations sont possibles au niveau du calcul lui-même, mais nous avons cependant pu montrer que, malgré des approximations, l'approche fondée sur la formulation de Kubo donnait des résultats corrects. L'avantage de cette méthode est que le spectre en température accessible est beaucoup plus important qu'avec l'approche par l'équation de Boltzmann. Cela signifie que la formulation de Kubo est plus appropriée pour obtenir des informations près la transition de phase. Pour cela, il faudrait incorporer dans les équations le module du paramètre d'ordre (modèle  $\sigma$  linéaire).

Plusieurs extensions de cette étude sont possibles. Il serait déjà souhaitable de calculer plus précisément, dans le cadre de l'approche développée dans ce travail, la valeur de la viscosité de cisaillement en calculant explicitement les fonctions de Green à six et huit points. Par ailleurs, on pourrait également essayer de déterminer la nature des modes hydrodynamiques associés aux nouveaux coefficients de transport introduits au deuxième chapitre. On pourrait enfin incorporer dans les équations le module du paramètre d'ordre (modèle  $\sigma$  linéaire) afin d'étudier la restauration de la symétrie chirale. Ensuite, l'utilisation du groupe de renormalisation dynamique permettrait d'obtenir le comportement critique des coefficients de transport du gaz de hadrons et fournirait ainsi des informations précieuses sur la transitions de phase subie par ce système (transition de phase de déconfinement).

Ce travail a fait l'objet de deux publications ([22], [38]).

# Annexe A

## Forme du tenseur des contraintes

Dans cette annexe, nous allons établir, dans l'approximation linéaire, la forme la plus générale du tenseur des contraintes qui s'appliquent sur un fluide. On en déduira l'équation du mouvement qui régit l'évolution de ce fluide [1].

### A.1 Déformation dans les écoulements

Les déformations d'une particule de fluide (volume de fluide dont les dimensions sont petites par rapport aux dimensions caractérisant l'écoulement et grandes devant le libre parcours moyen) sont analogues aux déformations d'un solide élastique. De façon générale, l'accroissement de vitesse d'une particule de fluide,  $d\vec{v}$ , est relié au déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  par la relation linéaire  $d\vec{v} = G d\vec{r}$ .  $G$  est un tenseur d'ordre deux, le tenseur des déformations. Ses composantes sont donc les gradients des vitesses, et se décomposent sous la forme :

$$G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} + \omega_{ij}$$

Analysons ces deux termes :

- $e_{ij}$  est un terme de déformation pure. On peut le décomposer en une partie diagonale  $t_{ij}$  associée à la dilatation volumique, et une partie de trace nulle  $d_{ij}$  appelée déviateur, et qui correspond à une déformation sans changement de volume :

$$e_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ll} + \left( e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ll} \right) = t_{ij} + d_{ij}$$

- $\omega_{ij}$  est un terme de rotation pure qui représente la vitesse angulaire de rotation locale sans déformation.

Le tenseur des déformations (que l'on appelle également tenseur gradient de vitesse)  $G$  peut donc toujours être décomposé en trois termes :

$$G_{ij} = t_{ij} + d_{ij} + \omega_{ij}$$

Ainsi, par exemple, la déformation d'un élément de volume dans un écoulement de cisaillement simple peut être décomposé en une elongation et une rotation (voir figure A.1) .

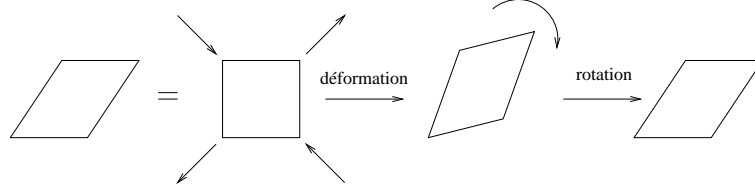


FIG. A.1: Décomposition d'un cisaillement simple en une élongation et une rotation.

## A.2 Dynamique des fluides

### A.2.1 Tenseur des contraintes

Sur une surface  $dS$  (de normale  $\vec{n}$ ), il s'exerce des contraintes que l'on peut représenter par un tenseur de rang 2, noté  $[\sigma]$  et tel que :

$$\frac{df_i}{dS} = \sigma_{ij} n_j$$

On peut décomposer ce tenseur des contraintes en une partie normale à la surface (que l'on identifie à la *pression*) et notée  $-P \delta_{ij}$ , et en une partie tangentielle, que l'on note  $\sigma'_{ij}$  :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - P\delta_{ij}$$

$\sigma'_{ij}$  est identifié au tenseur des contraintes de viscosité, et est symétrique. Les contraintes de viscosité s'annulant lorsqu'une particule de fluide se déplace sans déformation,  $\sigma'_{ij}$  ne doit pas dépendre de  $\omega_{ij}$ . D'autre part, on s'intéresse à des fluides *newtoniens* pour lesquels les contraintes sont proportionnelles aux déformations. Dans ce cas, les contraintes de viscosité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= 2Ae_{ij} + B\delta_{ij}e_{ll} \\ &= \eta \left( 2e_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}e_{ll} \right) + \zeta\delta_{ij}e_{ll} \\ &= \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \text{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$\eta$  est la viscosité de cisaillement, caractéristique du fluide, et  $\zeta$  est la seconde viscosité (elle intervient dans les cas où le fluide est compressible, car dans ce cas seulement,  $e_{ll}$  est non nul). Ces deux coefficients sont positifs et ne dépendent pas de la vitesse, car on a supposé que les gradients de vitesse étaient reliés linéairement aux contraintes.  $\zeta$  est généralement très petit devant  $\eta$  mais il peut devenir très grand lorsque le temps de relaxation des processus ramenant le système à l'équilibre est long par rapport au temps caractéristique de la compression [5]. Le coefficient  $\zeta$  (la viscosité volumique) intervient souvent dans les phénomènes d'atténuation du son ; en effet, la propagation du son dans un fluide s'accompagne d'une compression (sinon la vitesse du son serait infinie).  $\zeta$  n'est pas une constante du fluide, elle dépend de la fréquence de l'onde sonore ou du mouvement qui la met en évidence.

Il est important de noter que le tenseur des contraintes qui intervient dans la conservation de la quantité de mouvement est en fait :

$$\tau_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}$$

Si on se place dans le référentiel de repos du fluide, le terme convectif  $\rho v_i v_j$  est nul, et on a dans ce cas la formule (1.11) utilisée dans le chapitre 1.

### A.2.2 Équations du mouvement

A partir de cette expression du tenseur des contraintes, on peut déterminer l'équation du mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} d\tau = \int_V \rho \vec{f} d\tau + \oint_S [\sigma] \cdot \vec{n} d\Sigma$$

où  $\vec{f}$  représente l'ensemble des forces massiques autres que les forces de contraintes et  $S$  est la surface entourant le volume fixe  $V$ . En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, on obtient :

$$\int_V \left( \rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'] + \overrightarrow{\text{grad}}P \right) d\tau = 0$$

Or, d'après A.1,  $\{\overrightarrow{\text{div}}[\sigma']\}_i = \eta \Delta v_i + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{v})\}_i$ , donc

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \rho \vec{f} - \overrightarrow{\text{grad}}P + \eta \vec{\Delta} \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{v})$$

Cette équation est l'équation la plus générale pour un fluide. Dans le cas des fluides incompressibles,  $\text{div}\vec{v} = 0$  et on retrouve l'équation de Navier-Stokes qui décrit les fluides visqueux newtoniens et incompressibles. Celle d'Euler, qui décrit les fluides parfaits (non visqueux) est obtenue en faisant en plus  $\eta = 0$ .



# Annexe B

## Théorie de la réponse linéaire

Dans cette annexe, on présente des outils nécessaires aux calculs du chapitre 1.

### B.1 Évolution d'un système soumis à un hamiltonien dépendant du temps et point de vue d'interaction[27]

Considérons un système physique en équilibre et soumis à un hamiltonien  $H_0$  à l'instant  $t = -\infty$ . Si l'on perturbe le système de sorte que son hamiltonien devienne  $H(t) = H_0 + \delta H(t)$ , le vecteur d'état du système  $|\psi_S(t)\rangle$  satisfait l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_S(t)\rangle = H(t) |\psi_S(t)\rangle$ . On définit maintenant le vecteur d'état dans le point de vue d'interaction  $|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi_S(t)\rangle$  et l'on peut montrer que son évolution est donnée par  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle = \delta H_I(t) |\psi_I(t)\rangle$ , où l'opérateur en représentation d'interaction est défini par  $\delta H_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \delta H(t) e^{-iH_0 t/\hbar}$ . L'équation différentielle précédente est équivalente à l'équation intégrale :

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(-\infty)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \delta H_I(t') |\psi_I(t')\rangle \quad (\text{B.1})$$

L'utilisation de la représentation d'interaction ne change évidemment pas la physique. Il y a égalité entre les valeurs moyennes d'une observable  $A$  dans les représentations de Schrödinger et d'interaction, c'est-à-dire que  $\langle A(t) \rangle = \langle \psi_I(t) | \hat{A}_I(t) | \psi_I(t) \rangle = \langle \psi_S(t) | \hat{A}_S(t) | \psi_S(t) \rangle$ . La valeur moyenne à l'équilibre est  $\langle A(t) \rangle_{eq} = \langle \psi_I(-\infty) | \hat{A}_I(t) | \psi_I(-\infty) \rangle$ .

### B.2 Réponse linéaire

L'équation B.1 est soluble par itération et donne au premier ordre en perturbation :

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(-\infty)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \delta H_I(t') |\psi_I(-\infty)\rangle$$

En posant  $\delta \langle A(t) \rangle = \langle A(t) \rangle - \langle A(t) \rangle_{eq}$ , on en déduit la variation de  $A$  :

$$\delta \langle A(t) \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' \left\langle [\hat{A}_I(t), \delta H_I(t')] \right\rangle_{eq} \quad (\text{B.2})$$



Dans le chapitre 1, on considère plusieurs opérateurs  $\hat{A}_i(t, \vec{x})$  et un hamiltonien d'interaction :  $\delta H(t) = - \int d^3\vec{x} F_j(t, \vec{x}) \hat{A}_j(t, \vec{x})$  où il y a sommation sur les indices répétés. Les  $F_j(t, \vec{x})$  sont les forces associées aux  $\hat{A}_j(t, \vec{x})$ , et on les écrit sous la forme :  $F_j(t, \vec{x}) = F_j(\vec{x}) e^{\varepsilon t} \theta(-t)$ .

Dans ce cas, la théorie de la réponse linéaire nous donne la variation d'une quantité  $A_i$  par :

$$\delta \langle \hat{A}_i(t, \vec{x}) \rangle = i \int d^3\vec{x}' \int_{-\infty}^t dt' \langle [\hat{A}_i(t, \vec{x}), \hat{A}_j(t', \vec{x}')] \rangle_{eq} F_j(\vec{x}') e^{\varepsilon t'} \theta(-t')$$

On peut remarquer que cette expression nécessite la connaissance des commutateurs de deux opérateurs, c'est-à-dire les  $\chi''_{ij}$  définis en hydrodynamique dans le chapitre 1, ou les  $\rho_{ij}$  de la théorie des champs. On voit également dans cette formule la propriété de causalité puisque  $t'$  doit être inférieur à  $t$  : la réponse à l'instant  $t$  dépend des champs pris en  $t' < t$ .

### B.3 Théorème fluctuation-dissipation

Le théorème fluctuation-dissipation établit une relation entre le commutateur et les corrélations :

$$\begin{aligned} & \langle [A_i(\vec{r}, t) - \langle A_i \rangle_{eq}, A_j(\vec{r}', t') - \langle A_j \rangle_{eq}]_{\pm} \rangle_{eq} \\ &= \int \frac{d\omega}{\pi} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} e^{-i\omega(t-t')} \chi''_{ij}(\vec{k}, \omega) \frac{1 \pm e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} \end{aligned}$$

On retrouve dans cette formule la définition de  $\chi''_{ij}(k)$ , lié à la dissipation :

$$\langle [A_i(x), A_j(x')] \rangle_{eq} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} 2\chi''_{ij}(k) \quad (\text{B.3})$$

Et on obtient la formule pour l'anti-commutateur (fonction de corrélations) décrivant les fluctuations :

$$\langle \{A_i(x) - \langle A_i \rangle_{eq}, A_j(x') - \langle A_j \rangle_{eq}\} \rangle_{eq} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} 2\chi''_{ij}(k) \coth \frac{\beta\omega}{2} \quad (\text{B.4})$$

# Annexe C

## Théorie quantique des champs

Dans cette annexe, nous allons rappeler quelques définitions de théorie quantique des champs à température nulle, dans le cas simple d'un champ scalaire. Puis nous introduirons les formalismes de la théorie des champs à température finie [29] [34].

### C.1 A température nulle

#### C.1.1 Cas libre

Le lagrangien d'un champ scalaire  $\phi(x)$  libre de masse  $m$  s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^2(x))$$

L'équation d'Euler-Lagrange appliquée à ce lagrangien montre que ce champ  $\phi(x)$  satisfait l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0$$

Le propagateur de Feynman  $G_F(x)$  est défini comme la valeur moyenne sur le vide du produit chronologique  $T(\phi(x), \phi(0)) = \theta(x_0)\phi(x)\phi(0) + \theta(-x_0)\phi(0)\phi(x)$  qui est le produit de deux opérateurs en représentation de Heisenberg (les opérateurs  $\phi(x)$  dépendent du temps) :

$$\begin{aligned} G_F(x) &= -i < 0 | T(\phi(x), \phi(0)) | 0 > \\ &= \theta(x_0) G^>(x) + \theta(-x_0) G^<(x) \end{aligned}$$

ce qui définit les fonctions de corrélation  $G^\gtrless(x)$ . Le propagateur de Feynman est une fonction de Green, c'est-à-dire une solution de l'équation  $(\square + m^2)G_F(x) = -\delta^4(x)$ .  $G_F(x)$  s'exprime dans l'espace de Fourier par :

$$G_F(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Les fonctions de corrélations s'écrivent quant à elles :

$$G^\gtrless(k) = -i \theta(\pm k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2)$$

On définit enfin les propagateurs retardé et avancé qui sont en fait les propagateurs physiques à partir desquels on peut calculer les propriétés d'un système par :

$$G_A^R(x_0) = \mp i \theta(\pm x_0) < 0 | [\phi(x), \phi(0)] | 0 >$$

soit dans l'espace réciproque par :

$$G_A(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 \pm i\epsilon \operatorname{sgn}(k_0)}$$

Les propagateurs  $G_F(k)$  et  $G_{R/A}(k)$  ne dépendent que d'une seule fonction, la densité spectrale  $\rho(k)$  définie par :

$$\rho(k) = i(G^>(k) - G^<(k)) \quad (\text{C.1})$$

$\rho(k)$  est une fonction réelle, impaire en  $k_0$ , du même signe que  $k_0$  (pour des bosons), et obéissant à la règle de somme :  $\int \frac{dk_0}{\pi} k_0 \rho(k) = 1$ . Cette densité spectrale peut s'interpréter comme la densité de probabilité pour la particule d'impulsion  $k$  d'avoir l'énergie  $k_0$ . La représentation spectrale du propagateur retardé (physique) est :

$$G_R(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k')}{k_0 - k'_0 + i\epsilon} \quad (\text{C.2})$$

Cette équation est tout à fait générale et on voit que la connaissance de  $\rho(k)$  suffit pour déterminer le propagateur. Dans le cas libre, cette densité spectrale  $\rho(k)$  vaut (équation C.1) :

$$\rho(k) = \operatorname{sgn}(k_0) 2\pi \delta(k^2 - m^2) \quad (\text{C.3})$$

### C.1.2 Dans un milieu

Lorsque la particule est en interaction, il y a un terme supplémentaire dans le lagrangien et l'expression des propagateurs est différente. Le propagateur complet retardé  $\mathcal{G}_R$  décrivant les modifications des propriétés physiques dues aux interactions satisfait l'équation de Dyson suivante :

$$\mathcal{G}_R(k) = G_R(k) + G_R(k) \Sigma_R \mathcal{G}_R(k)$$

c'est-à-dire que  $G_R(k)$  devient formellement, dans un milieu :

$$\mathcal{G}_R(k) = \frac{1}{k^2 - m^2 - \Sigma_R}$$

Pour avoir accès à la fonction de Green retardée, il faut donc calculer de manière équivalente soit la self-énergie  $\Sigma_R$  soit la densité spectrale "complète" C.2. La signification physique de  $\Sigma_R(k)$  est simple. Sa partie réelle va donner la relation de dispersion dans le milieu et sa partie imaginaire est reliée à la largeur, c'est-à-dire au temps de vie, de la particule. Par ailleurs, il existe évidemment une relation entre  $\rho$  et  $\Sigma_R$  :

$$\rho(k) = \frac{2\operatorname{Im}\Sigma_R(k)}{(k^2 - m^2 - \operatorname{Re}\Sigma_R(k))^2 + (\operatorname{Im}\Sigma_R(k))^2}$$

## C.2 A température finie

Le fait de considérer une température non nulle change la définition des fonctions de Green. En effet, la valeur moyenne sur le vide est remplacée par une moyenne statistique, soit pour un système à l'équilibre thermodynamique :

$$G_F(x) = -i \frac{\operatorname{Tr} [e^{-\beta H} T(\phi(x), \phi(0))]}{\operatorname{Tr} [e^{-\beta H}]}$$

avec  $H$  le hamiltonien du système. Cette nouvelle définition de la valeur moyenne permet d'obtenir la relation KMS (conséquence de la cyclicité de la trace) :

$$\langle A(t)B(t') \rangle = \langle B(t' - i\beta)A(t) \rangle$$

pour deux opérateurs  $A$  et  $B$  quelconques. Nous voyons donc que formellement temps imaginaire et température sont équivalents. Par ailleurs, grâce à cette relation KMS, on constate immédiatement que  $G_F(x)$  est périodique en temps, de période  $-i\beta$ . On peut donc se restreindre à un intervalle de cette amplitude. Enfin, il est possible de montrer que les valeurs permises de  $t$  sont situées sur un contour tel que la partie imaginaire de  $t$  soit décroissante monotone de 0 à  $-i\beta$ . Ces conditions sur  $G_F(x)$  vont nous amener à définir deux formalismes pour les fonctions de Green thermiques.

### C.2.1 Le formalisme à temps imaginaire

Un premier formalisme est celui de Matsubara où l'on choisit le contour le plus simple, représenté ci-dessous.

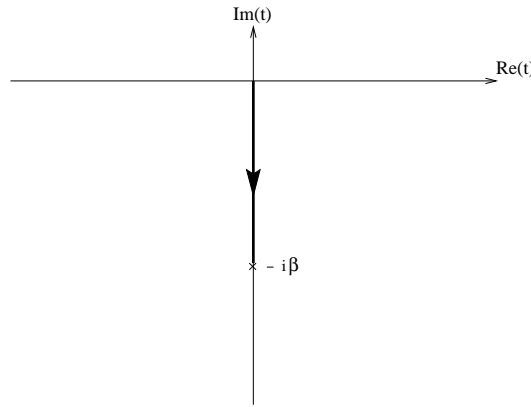


FIG. C.1: Contour du formalisme à temps imaginaire

Le propagateur de Matsubara exprimé dans l'espace réciproque est :

$$\Delta(i\omega_n, \vec{k}) = \frac{-1}{\vec{k}^2 + m^2 - (i\omega_n)^2}$$

où  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$  avec  $n$  entier sont les fréquences de Matsubara. On peut remarquer que dans la limite où  $T \rightarrow 0$ , le contour correspond à une rotation de Wick  $t \rightarrow -i\tau$ .

### C.2.2 Formalisme à temps réel

Un autre formalisme permet de calculer des fonctions de Green à temps réel. Pour cela, il faut que le contour contienne une partie de l'axe réel.

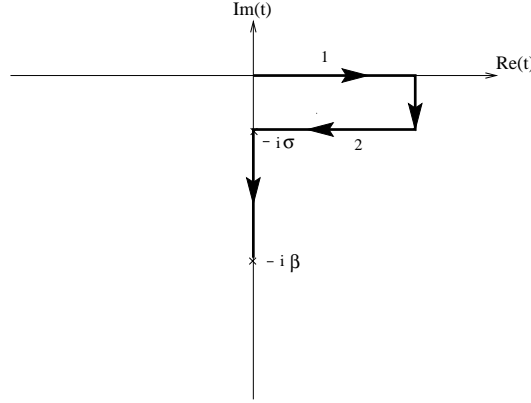


FIG. C.2: Contour du formalisme à temps réel

Ce formalisme est plus approprié, ainsi que nous le verrons par la suite, pour décrire des situations hors équilibre. Il présente néanmoins l'inconvénient de doubler les degrés de liberté de telle sorte que le propagateur habituel est remplacé par une matrice  $(2 \times 2)$ . En effet, les parties verticales du contour ne jouant aucun rôle, il existe 4 possibilités pour "placer" les temps  $t$  et  $t'$  de la fonction de Green  $G_F(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ . Cela correspond à quatre propagateurs  $G_{ij; i,j=1,2}$  suivant que les temps sont situés sur la partie 1 ou 2 du contour. On montre que [29] :

$$\begin{aligned}
 G_{11}(k) &= \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - 2i\pi n(|k_0|) \delta(k^2 - m^2) \\
 &= [1 + n(|k_0|)]G_F(k) - n(|k_0|)G_F^*(k) \\
 &= [1 + n(k_0)]G_R(k) - n(k_0)G_A(k) \\
 &= G_{22}(k)^* \\
 G_{12}(k) &= -ie^{\sigma k_0} \text{sgn}(k_0) n(k_0) 2\pi\delta(k^2 - m^2) \\
 G_{21}(k) &= -ie^{-\sigma k_0} \text{sgn}(k_0) [1 + n(k_0)] 2\pi\delta(k^2 - m^2)
 \end{aligned}$$

où  $n(k_0) = \frac{1}{e^{\beta k_0} - 1}$  est la distribution de Bose-Einstein. Le paramètre  $\sigma$  indiqué sur le schéma ci-dessus peut prendre n'importe quelle valeur de 0 à  $\beta$ . Les résultats physiques ne pourront donc pas en dépendre et il est ainsi possible de choisir pour  $\sigma$  la valeur la plus "pratique" pour effectuer les calculs. Les choix habituels sont  $\sigma = \beta/2$  car il donne une forme symétrique aux propagateurs ( $G_{12}(k) = G_{21}(k)$ ) et  $\sigma = 0$ . Dans ce cas, que nous considérerons toujours par la suite car il a l'avantage de donner des expressions similaires à celles que l'on obtient dans les phénomènes hors équilibre (voir paragraphe 7.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
 G_{21}(k) &= G^>(k) = -i \text{sgn}(k_0) [1 + n(k_0)] 2\pi\delta(k^2 - m^2) \\
 G_{12}(k) &= G^<(k) = -i \text{sgn}(k_0) n(k_0) 2\pi\delta(k^2 - m^2)
 \end{aligned}$$

La fonction densité spectrale, quant à elle, est toujours définie par :

$$\begin{aligned}
 \rho(k) &= i(G^>(k) - G^<(k)) \\
 &= i(G_R(k) - G_A(k))
 \end{aligned}$$

Sa connaissance permet d'avoir accès, comme à température nulle, aux propagateurs. Notons enfin que dans le cas libre, les propagateurs  $G_A$  sont indépendants de  $T$ , tout comme la densité spectrale qui a la même expression qu'à température nulle (équation C.3).

### C.2.3 Propagateurs complets et self-énergie

Considérons maintenant le champ scalaire  $\phi(x)$  en interaction avec le milieu, c'est-à-dire que l'on rajoute un terme de couplage au lagrangien. Les propagateurs complets  $\mathcal{G}_{ab}(k)$  sont solutions de l'équation de Dyson matricielle, qui s'écrit sous forme symbolique :

$$\mathcal{G}_{ab}(k) = G_{ab}(k) + G_{ac}(k)\Sigma_{cd}(k)\mathcal{G}_{db}(k)$$

On obtient donc plusieurs équations, une pour chaque propagateur. Seuls les fonction de Green retardée et avancée obéissent à une équation analogue à celle rencontrée à température nulle [30]. La résolution conduit à l'expression :

$$\mathcal{G}_{11}(k) = \frac{1 + n(k_0)}{k^2 - m^2 - \Sigma_R(k)} - \frac{n(k_0)}{k^2 - m^2 - \Sigma_R^*(k)}$$

où  $\Sigma_R(k)$  est la self-énergie retardée. Notons enfin qu'il est plus facile techniquement de calculer  $\Sigma_{11}$ .  $\Sigma_R$  et les autres composantes de la self-énergie sont alors données par [31] :

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} &= \Sigma_{21} = \frac{-i}{\cosh(\beta|k_0|/2)} \text{Im}\Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} &= -\Sigma_{11}^* \\ \text{Re}\Sigma_R &= \text{Re}\Sigma_{11} \\ \text{Im}\Sigma_R &= \tanh(\beta|k_0|/2)\text{Im}\Sigma_{11} \end{aligned} \tag{C.4}$$



# Annexe D

## Règles de coupure

Dans cette annexe, nous présentons une technique de calcul de diagrammes permettant d'obtenir soit la self-énergie par les règles de Kobes et Semenoff, soit la densité spectrale par les règles de Jeon qui généralisent à température finie les règles de Cutkosky.

### D.1 A température nulle : règles de Cutkosky

On considère un graphe de Feynman particulier  $G(x_1, \dots, x_p)$  (par exemple, le graphe de la figure page suivante). Pour calculer la contribution de ce graphe, il est possible d'utiliser les règles de Cutkosky [28]. Pour cela, on procède de la manière suivante : on construit des graphes  $F(x_1, \dots, \underline{x_i}, \dots, x_p)$  ayant la même topologie que le graphe précédent mais dont certains vertex  $x_i$  sont soulignés (entourés sur le graphe). La contribution de chacun des graphes  $F$  peut alors se calculer à l'aide des règles suivantes :

$G_F(x_i - x_j)$  si  $x_i$  et  $x_j$  ne sont pas entourés,



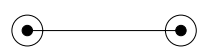
$G^<(x_i - x_j)$  si  $x_i$  n'est pas entouré et  $x_j$  l'est,



$G^>(x_i - x_j)$  si  $x_i$  est entouré et  $x_j$  ne l'est pas ,



$G_F^*(x_i - x_j)$  si  $x_i$  et  $x_j$  sont entourés.



Il faut également ajouter que dans le cas d'une interaction en  $g\phi^3$  considérée sur le graphe, les vertex entourés contribuent d'un facteur  $-g$  au lieu de  $g$ . Par ailleurs, il est possible de montrer [29] que lorsque  $x_i^0 > x_j^0$  les diagrammes  $F(x_1, \dots, \underline{x_j}, \dots, \underline{x_i}, \dots, x_p)$  et  $F(x_1, \dots, \underline{x_j}, \dots, x_i, \dots, x_p)$  s'annulent deux à deux. En remarquant que le diagramme où aucun vertex n'est entouré est le diagramme à calculer ( $F(x_1, \dots, x_p) = G(x_1, \dots, x_p)$ ) et que celui où tous les vertex sont entourés est son complexe conjugué ( $F(\underline{x_1}, \dots, \underline{x_p}) = G^*(x_1, \dots, x_p)$ ), on obtient finalement l'équation suivante :

$$\text{Im}(iG(x_1, \dots, x_p)) = -\frac{1}{2} \sum F(x_1, \dots, \underline{x_i}, \dots, x_p) \quad (\text{D.1})$$

où il faut sommer sur toutes les possibilités de souligner les vertex, excepté le cas où aucun vertex n'est souligné et celui où tous les vertex sont soulignés, comme sur le graphe de la page suivante. En passant dans l'espace de Fourier, l'expression des propagateurs  $G^{\lessgtr}(k)$  montre que



les diagrammes contribuant au calcul sont ceux où les vertex soulignés et non soulignés forment des parties connexes. Il est donc possible de séparer un graphe par une coupure avec d'un côté les vertex entourés et de l'autre les vertex non entourés. Les propagateurs se trouvant à cheval sur la coupure ( $G^{\lessgtr}(k)$ ) sont donc des "propagateurs coupés" (voir figure D.3).

## D.2 A température finie, règles de Kobes et Semenoff

A température finie, la situation est un peu plus compliquée [29] [32]. D'une part, avec la définition de  $G^{\lessgtr}(k)$ , toutes les coupures sont possibles, même celles générant des parties non connexes et d'autre part, dans le formalisme à temps réel, les vertex peuvent être de type 1 ou de type 2, ce qui engendre 16 possibilités pour joindre 2 vertex. En choisissant  $\sigma = 0$ , on simplifie un peu le problème puisqu'alors  $G^< = G_{12}$  et  $G^> = G_{21}$ . De plus, on sait que les vertex externes d'un graphe sont forcément de type 1 (les champs de type 1 sont les "champs physiques"). Il n'y a donc que les vertex internes qui peuvent être de type 1 ou 2 (les champs de type 2 sont les "champs fantômes"). On obtient ainsi la même équation que D.1 avec les vertex externes de type 1 et une sommation supplémentaire sur les vertex internes qui peuvent être soit de type 1 soit de type 2. L'application principale de ces règles de coupure est le calcul de la self-énergie ; et comme la connaissance de  $\Sigma_{11}$  permet de calculer les autres composantes de  $\Sigma$ , il suffit de calculer un graphe avec tous les vertex fixés à 1 (les règles sont alors les mêmes qu'à  $T=0$ , avec des propagateurs thermiques, c'est-à-dire  $G_F(k) = G_{11}(k)$  entre deux vertex non entourés,  $G_F^*(k) = G_{22}(k)$  entre deux vertex entourés,  $G^<(k) = G_{12}(k)$  quand  $k$  va d'un vertex entouré vers un non entouré et  $G^>(k) = G_{21}(k)$  pour le contraire). A titre d'exemple, nous présentons le calcul de la self-énergie à une boucle pour la théorie  $g\phi^3$  [31]. Par définition :

$$\begin{aligned}
\text{Im}\Sigma_{11}(q) &= \text{Im} \left( i \begin{array}{c} \text{q} \quad \text{k} \quad \text{q} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{---} \quad \text{1} \\ \text{q-k} \end{array} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \begin{array}{c} \text{q} \quad \text{---} \quad \text{q} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{---} \quad \text{1} \end{array} + \begin{array}{c} \text{q} \quad \text{---} \quad \text{q} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{1} \quad \text{---} \quad \text{1} \end{array} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-gG^<(k)G^<(q-k)g + gG^>(k)G^>(q-k)(-g)) \\
\text{Or, } G^<(k) &= e^{-\beta k_0} G^>(k), \text{ ce qui donne :} \\
\text{Im}\Sigma_{11}(q) &= -\frac{g^2}{2} (1 + e^{-\beta q_0}) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \{ \text{sgn}(k_0) \text{sgn}(q_0 - k_0) [1 + n(k_0)] [1 + n(q_0 - k_0)] \\
&\quad \times \delta(k^2 - m^2) \delta((q-k)^2 - m^2) \}
\end{aligned}$$

L'intégrale s'effectue facilement, et on en déduit alors que la self-énergie intervenant dans le propagateur s'exprime comme :

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\Sigma_R) &= \text{sgn}(q_0) \tanh(\beta q_0/2) \text{Im}(\Sigma_{11}) = -\pi g^2 \text{sgn}(q_0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_1 E_2} \\
&\quad [ (1 + n_1 + n_2) \delta(q_0 - E_1 - E_2) + (n_1 - n_2) \delta(q_0 + E_1 - E_2) ]
\end{aligned}$$

+ $(n_2 - n_1)\delta(q_0 - E_1 + E_2) - (1 + n_1 + n_2)\delta(q_0 + E_1 + E_2)]$   
 où  $n_{1,2} = \frac{1}{e^{\beta E_{1,2}} - 1}$ ,  $E_1 = \sqrt{k^2 - m^2}$  et  $E_2 = \sqrt{(q - k)^2 - m^2}$ . Sous cette forme, l'expression précédente s'interprète facilement grâce aux facteurs d'occupation de Bose-Einstein. Par ailleurs, la connaissance de  $\text{Im}(\Sigma_R)$  permet d'avoir accès, ainsi que nous l'avons indiqué dans l'appendice précédent, à toutes les autres grandeurs physiques habituelles, permettant la caractérisation du système.

### D.3 Règles de S. Jeon

Les règles de coupures présentées dans cette partie [33] servent à calculer des densités spectrales. On considère un graphe (par exemple le même que sur la figure précédente) pour lequel on veut calculer  $\rho_{AB}(k)$ , c'est-à-dire le commutateur de deux opérateurs externes  $A$  et  $B$ . De la même façon que dans le paragraphe précédent, on dessine toutes les façons de couper le graphe : une coupure sépare le graphe en deux parties, une partie hachurée (contenant tous les vertex entourés) et une partie non hachurée contenant tous les vertex non entourés (voir figure D.3). Les règles sont les suivantes :

- dans la région non hachurée, on applique le propagateur habituel  $\tilde{G}(k)$  défini par sa représentation spectrale :

$$\tilde{G}(k) = \int \frac{dk'_0}{2\pi} \frac{\rho(k')}{k_0 - k'_0 + i\varepsilon} + n(k_0)\rho(k) \text{ et un facteur } g \text{ pour le vertex.}$$

- dans la région hachurée, on applique le propagateur  $\tilde{G}(k^*)$  et un facteur  $-g$  au vertex.
- chaque ligne coupée avec un moment qui va de la région hachurée à la région non hachurée contribue d'un facteur  $S(k) = [1 + n(k_0)]\rho(k)$ .

On additionne les contributions des différents graphes, en intégrant sur chaque boucle de moment, et en tenant compte du facteur de symétrie.

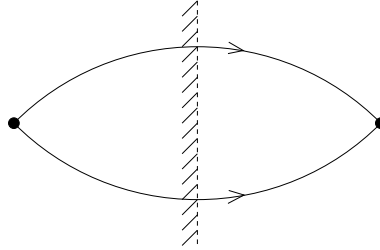


FIG. D.1: Coupure sur un graphe à une boucle équivalente au deuxième diagramme de la figure précédente.

Le calcul de la densité spectrale du graphe à une boucle donne, au premier ordre, le même résultat que précédemment.



# Annexe E

## Calcul numérique de $\eta$

Dans cette annexe, nous présentons les calculs intermédiaires entre la formule donnant la viscosité  $\eta$  et une expression facilement programmable. Nous avons donc montré que :

$$\eta = \frac{\beta}{10} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} I_\pi(k) n(k^0) S_{free}(k) \frac{\mathcal{D}_\pi(k)}{\Sigma_I(k)}$$

Or, par des considérations de symétrie,  $\mathcal{D}_\pi(k)$  doit s'écrire :

$$\mathcal{D}_\pi(k) = (\hat{p}_l \hat{p}_m - \frac{1}{3} \delta_{lm}) \mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) \quad (\text{E.1})$$

où  $\hat{k}$  représente le vecteur unitaire dans la direction  $\vec{k}$ . L'indice "shear" se rapporte à la viscosité de cisaillement. En remplaçant  $S_{free}$  et  $I_\pi$  par leur expression, on obtient :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\beta}{10} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (k_l k_m - \frac{1}{3} \delta_{lm} \vec{k}^2) n(k^0) [1 + n(k^0)] sgn(k^0) 2\pi \delta(k^2 + m^2) \frac{\hat{k}_l \hat{k}_m - \frac{1}{3} \delta_{lm}}{\Sigma_I(k)} \mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) \\ &= \frac{\beta}{10} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}^2}{2E_k} (\hat{k}_l \hat{k}_m - \frac{1}{3} \delta_{lm})^2 \left\{ \frac{n(E_k)[1 + n(E_k)]}{\Sigma_I(E_k, \vec{k})} - \frac{-[1 + n(E_k)][-n(E_k)]}{-\Sigma_I(E_k, \vec{k})} \right\} \mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) \\ &= \frac{\beta}{10} 4\pi \int \frac{\vec{k}^4 d|\vec{k}|}{(2\pi)^3 E_k} \frac{2}{3} \frac{n(E_k)[1 + n(E_k)]}{\Sigma_I(E_k, \vec{k})} \mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) \\ &= \frac{\beta}{60\pi^2} \int \frac{k^4 d|\vec{k}|}{E_k^2 \Gamma_k} n_k (1 + n_k) \mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

où  $\Gamma_k = \frac{\Sigma_I(E_k, \vec{k})}{2E_k}$ , avec  $\Sigma_I$  la partie imaginaire de la self-énergie, représente la largeur, c'est-à-dire le temps de vie, de la particule.

Calculons maintenant  $\mathcal{D}_{shear}$ . Pour cela, on rappelle que  $\mathcal{D}_\pi$  satisfait :

$$\mathcal{D}_\pi(k) = I_\pi - (1 - e^{-k_0 \beta}) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \mathcal{L}_{full}(k, p) S_{free}(p) \frac{\mathcal{D}_\pi(p)}{2\Sigma_I(p)}$$

En contractant cette équation avec  $\hat{k}_l \hat{k}_m$ , et en utilisant l'équation (E.1), on obtient une équation intégrale pour  $\mathcal{D}_{shear}$  :

$$\mathcal{D}_{shear}(|\vec{k}|) = \vec{k}^2 + \frac{3}{16} \int \frac{d|\vec{p}|}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{E_p^2 \Gamma_p} n(E_p) [1 + n(E_p)] N_{shear}(|\vec{k}|, |\vec{p}|) \mathcal{D}_{shear}(|\vec{p}|) \quad (\text{E.3})$$

où le noyau  $N_{shear}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
N_{shear}(|\vec{k}|, |\vec{p}|) = & (1 - e^{-\beta E_k}) 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \left( \cos^2\theta - \frac{1}{3} \right) \left[ \frac{\lambda^2 [1 + n(E_k - E_p)]}{8\pi\beta |\vec{k} - \vec{p}|} \right. \\
& \left. \left\{ \theta \left( |\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k - E_p)^2 \right) \ln \left| \frac{1 - \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left( |\vec{k} - \vec{p}| \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{|\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k - E_p)^2}} + (E_k - E_p) \right) \right]}{1 - \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left( |\vec{k} - \vec{p}| \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{|\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k - E_p)^2}} - (E_k - E_p) \right) \right]} \right| \right. + \right. \\
& \left. \left. \theta(-|\vec{k} - \vec{p}|^2 + (E_k - E_p)^2 - 4m_{th}^2) \ln \left| \frac{\sinh(\frac{\beta}{4}(+))}{\sinh(\frac{\beta}{4}(-))} \right| \right\} (e^{+\beta E_p} - 1) \right. \\
& \left. - \frac{\lambda^2 [1 + n(E_k - E_p)]}{8\pi\beta |\vec{k} - \vec{p}|} \left\{ \theta \left( |\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k - E_p)^2 \right) \right. \right. \\
& \left. \left. \ln \left| \frac{1 - \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left( |\vec{k} - \vec{p}| \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{|\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k + E_p)^2}} + (E_k + E_p) \right) \right]}{1 - \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \left( |\vec{k} - \vec{p}| \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{|\vec{k} - \vec{p}|^2 - (E_k + E_p)^2}} - (E_k + E_p) \right) \right]} \right| \right. + \right. \\
& \left. \left. \theta(-|\vec{k} - \vec{p}|^2 + (E_k - E_p)^2 - 4m_{th}^2) \ln \left| \frac{\sinh(\frac{\beta}{4}(+))}{\sinh(\frac{\beta}{4}(-))} \right| \right\} (1 - e^{-\beta E_p}) \right] \quad (E.4)
\end{aligned}$$

Ensuite, on effectue le changement de variable :

$$y = |\vec{k} - \vec{p}| = \sqrt{(\vec{k} - \vec{p})(\vec{k} - \vec{p})} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + |\vec{p}|^2 - 2|\vec{k}||\vec{p}|\cos\theta}$$

dont la différentielle s'écrit  $dy = -\frac{|\vec{k}||\vec{p}|}{y} d(\cos\theta)$ . Les bornes d'intégration vérifient :

$$\begin{aligned}
\cos\theta = -1 & \iff y = |\vec{k}| + |\vec{p}| \\
\cos\theta = 1 & \iff y = ||\vec{k}| - |\vec{p}||
\end{aligned}$$

A partir de maintenant, on redimensionne les moments ( $k$  et  $p$ ) par la température, de façon à faire disparaître les  $\beta$  des exponentielles. Il faudra donc lire maintenant  $\left| \frac{\vec{k}}{T} \right|$  au lieu de  $|\vec{k}|$ . On obtient alors :

$$N_{shear}(|\vec{k}|, |\vec{p}|) = (1 - e^{-E_k}) \frac{\lambda^2}{4} \int_{|\vec{k}| - |\vec{p}|}^{|\vec{k}| + |\vec{p}|} \frac{dy}{|\vec{k}||\vec{p}|} \left[ \left( \frac{y^2 - \vec{k}^2 - \vec{p}^2}{2|\vec{k}||\vec{p}|} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \dots$$

Par ailleurs :  $[1 + n(E_k - E_p)](1 - e^{-E_k})(e^{E_p} - 1) = \frac{1}{n(E_p) - n(E_k)}$  et

$$(1 - e^{E_k})[1 + n(E_k + E_p)](1 - e^{-E_p}) = \frac{1}{1 + n(E_k) + n(E_p)}$$

Dans l'expression de  $N_{shear}$ , on peut montrer qu'il y a deux termes sur les quatre qui sont nuls. En effet, si  $y < |\vec{k}| + |\vec{p}| < E_k + E_p$ , alors  $\theta(y^2 - (E_k + E_p)^2) = 0$  et  $\theta(-y^2 + (E_k - E_p)^2 - 4m_{th}^2) = 0$ . On se retrouve donc avec l'expression suivante pour  $N_{shear}$  :

$$N_{shear}(|\vec{k}|, |\vec{p}|) = \frac{\lambda^2}{4} \int_{|\vec{k}| - |\vec{p}|}^{|\vec{k}| + |\vec{p}|} \frac{dy}{|\vec{k}||\vec{p}|} \left[ \left( \frac{y^2 - \vec{k}^2 - \vec{p}^2}{2|\vec{k}||\vec{p}|} \right)^2 - \frac{1}{3} \right] \left\{ \frac{1}{n(E_p) - n(E_k)} \right.$$

$$\times \ln \left| \frac{1 - \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_k - E_p)^2}} + (E_k - E_p) \right) \right]}{1 - \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_k - E_p)^2}} - (E_k - E_p) \right) \right]} \right|$$

$$- \frac{1}{1 + n(E_k) + n(E_p)} \ln \left| \frac{\sinh \left[ \frac{1}{4} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_k + E_p)^2}} + (E_k + E_p) \right) \right]}{\sinh \left[ \frac{1}{4} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_k + E_p)^2}} - (E_k + E_p) \right) \right]} \right| \Bigg\}$$

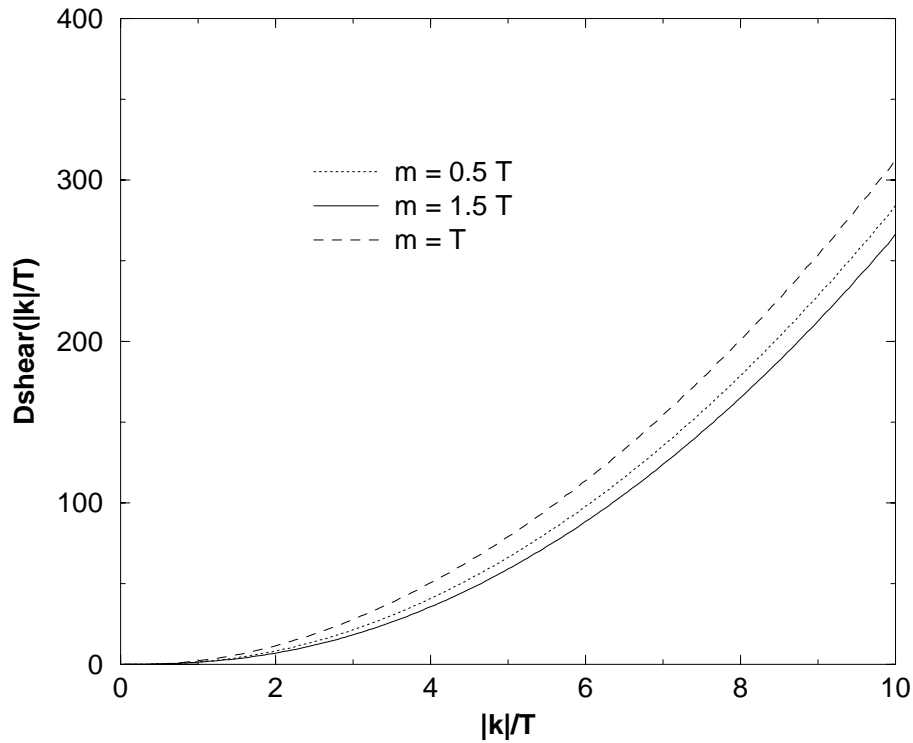
Nous voici donc muni de  $N_{shear}$ . Pour achever le calcul de  $\mathcal{D}_{shear}$  (voir équation (E.3)), il reste à calculer  $\Sigma_I$ . Par des calculs analogues, on montre de façon fastidieuse que :

$$\Sigma_I(p) = \frac{\lambda^2}{48(2\pi^3)} \int \frac{|\vec{l}| d|\vec{l}|}{2E_l} \int_{|\vec{p}| - |\vec{l}|}^{|\vec{p}| + |\vec{l}|} \frac{dy}{|\vec{p}|} n(E_l) [1 + n(E_l)]$$

$$\times \left\{ \frac{1}{n(E_l) - n(E_p)} \ln \left| \frac{1 - \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_p - E_l)^2}} + (E_p - E_l) \right) \right]}{1 - \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_p - E_l)^2}} - (E_p - E_l) \right) \right]} \right| \right|$$

$$- \frac{1}{1 + n(E_p) + n(E_l)} \ln \left| \frac{\sinh \left[ \frac{1}{4} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_p + E_l)^2}} + (E_p + E_l) \right) \right]}{\sinh \left[ \frac{1}{4} \left( y \sqrt{1 + \frac{4m_{th}^2}{y^2 - (E_p + E_l)^2}} - (E_p + E_l) \right) \right]} \right| \Bigg\}$$

Ces expressions de  $N_{shear}$  et  $\Sigma_I$  nous ont permis de calculer  $\mathcal{D}_{shear}$  numériquement :





# Bibliographie

- [1] E. Guyon, J.P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Interéditions/CNRS Editions (1994).
- [2] C. Vidal, G. Dewel, P. Borckmans, *Au-delà de l'équilibre*, Collection Enseignement des Sciences, Hermann (1994).
- [3] D. Forster, *Hydrodynamic fluctuations, broken symmetry and correlation fonctions*, Benjamin (1975).
- [4] L.P. Kadanoff, P.C. Martin, *Hydrodynamic Equations and Correlation Functions*, Annals of Physics **24**, pp.419-469 (1963).
- [5] L. Landau, E. Lifshitz, *Cours de Physique Théorique Vol.6 : Mécanique des Fluides*, Editions MIR (1989).
- [6] L. Landau, E. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Vol.9 : Statistical Physics Part II*, Bergamon Press (1980).
- [7] D.-T. Son, *Hydrodynamics of relativistic systems with broken continuous symmetries*, Int.J.Mod.Phys. A16S1C (2001) 1284-1286.
- [8] D.-T. Son (*Communication privée*).
- [9] D.-T. Son, *Hydrodynamics of nuclear matter in the chiral limit*, Phys.Rev.Lett. 84 (2000) 3771-3774.
- [10] I.E. Dzyaloshinskii, G.E. Volovick, *Poisson Brackets in Condensed Matter Physics*, Annals of Physics 125, (1980) 67-97.
- [11] G. Chanfray, G. Smadja *Les particules et leurs symétries*, Enseignement de la physique, Masson (1997).
- [12] M. Knecht, P. Guichon, J.-Y. Ollitrault, C. Cavata, H.-J. Pirner, S. Kox, G. Chanfray, C. Kuhn, M. Gonin, O. Sorlin, *Ecole Joliot-Curie de physique nucléaire 1998 - Matière Hadronique - De la structure du nucléon au déconfinement des quarks* (1998), 213.
- [13] J.-P. Blaizot, J.-N. Capdevielle, A. Capella, J. Gosset, G. Landaud, P. Lutz, A. Morel, B. Pire, D. Vautherin, *GIF 88 Ecole d'été de Physique Nucléaire et de Physique des Particules* (1988), 143-186.
- [14] G. Baym, B.-L. Friman, J.-P. Blaizot, M. Soyeur, W. Czyz, *Hydrodynamics of Ultra-Relativistic Heavy ion collisions*, Nuclear physics A407 (1983) 541-570.
- [15] L.-P. Csernai *Introduction to Relativistic Heavy Ion Collisions*, John Wiley and Sons (1994).
- [16] J.D. Bjorken *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions : The central rapidity region* Physical Review, D27 (1983) 140-151.
- [17] Cheuk-Yin Wong *Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collisions*, World Scientific (1994).



- [18] A.Muronga, Proc.17th Winter Workshop on Nuclear Dynamics (Park City, Utah,USA March 10-17,2001).
- [19] A.Muronga, Communication privée (2002), voir également ref. [20].
- [20] A. Muronga, Second-Order Dissipative Fluid Dynamics for Ultrarelativistic Nuclear Collisions *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 062302 ; Erratum *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 159901.
- [21] D. Davesne, *Etude de la propagation des pions dans la matière hadronique chaude*, Thèse Université Claude-Bernard Lyon 1 (1995), LYCEN - T 9525 ; *Transport coefficients of a hot pion gas*, *Phys. Rev.* C53 (1995), 53.
- [22] C. Pujol, D. Davesne, *Phys. Rev.* **C67** (2003) 014901.
- [23] S. Jeon, *Hydrodynamic transport coefficients in relativistic scalar field theory*, *Phys. Rev.* D52 (1995).
- [24] S. Jeon and L. G. Yaffe, *From Quantum Field Theory to Hydrodynamics : Transport Coefficients and Effective Kinetic Theory*, *Phys. Rev.* D53 (1996), 5799, hep-ph/9512263 (1995).
- [25] E.Wang, U. Heinz, *A Generalized Fluctuation-Dissipation Theorem for Nonlinear Response Functions*, hep-th/9809016 (1998).
- [26] E.Wang, U. Heinz, *Nonperturbative Calculation of the Shear Viscosity in Hot  $\phi^4$  Theorie in Real Time*, hep-ph/9910367 (1999).
- [27] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Laloë *Mécanique Quantique*, Hermann (1973).
- [28] R.E. Cutkosky, *J. Math. Phys.* 1, 429 (1960).
- [29] M. Le Bellac, *Thermal field theory*, Cambridge University Press (1996).
- [30] G.D. Mahan, *Many-particle physics*, Plenum Press (1990).
- [31] R.L. Kobes, G.W. Semenoff, *Discontinuities of Green functions in field theory at finite temperature and density*, *Nuclear Physics*, B260, 714 (1985).
- [32] F. Gelis, *Cutting rules in the real time formalisms at finite temperature*, hep-ph/9701410 (1997).
- [33] S. Jeon, *Computing spectral densities in finite temperature field theory*, *Phys. Rev.* D47, 4586 (1993).
- [34] D. Poizat, *Singularités infrarouges et singularités de masse dans les théories quantiques des champs relativistes à température finie*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice (1990).
- [35] D.N. Zubarev, *Nonequilibrium statistical thermodynamics*, Plenum, NY, 74.
- [36] A. Hosoya, M. Sakagami, M. Takao, *Non equilibrium thermodynamics in fiel theory : transport coefficients*, *Ann. of Phys. (NY)*, **154**, 229 (1984).
- [37] S.R. De Groot, W.A. Van Leeuwen, C.G. Van Weert, *Relavistic Kinetic Theory*, North Holland Publishing Compagny (1980).
- [38] Y. Lallouet, D. Davesne, C. Pujol, *Phys.Rev.* **C67 (2003) 057901**.
- [39] B.Carter, I.M. Khalatnikov, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 4536 ; *Ann. Phys.* **219** (1992) 243.
- [40] S.J.Putterman, *Superfluid Hydrodynamics* (North-Holland/American Elsevier, 1974).
- [41] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York,1972).
- [42] M. Prakash, M. Prakash, R. Venugopalan and G.W. Welke, *Phys. Rep.* **227** (1993) 321.

- [43] T. Ericson, W. Weise, *Pions and Nuclei* (Oxford University Press, New York, 1988).
- [44] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory* (International Edition, 1985).
- [45] A. Das, *Field Theory : a path integral approach* (World Scientific, 1993).
- [46] E. Wang, U. Heinz, hep-ph/0201116.
- [47] Benjamin W. Lee, *Chiral Dynamics* (Gordon and Breach, 1972).
- [48] R.R. Parwani, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 4695.
- [49] G.Chanfray, D. Davesne, *Z. Phys.* **A 349** (1994) 65-76.
- [50] E. Wang, U. Heinz, hep-ph/9509331.
- [51] F. J. Llanes-Estrada, A. Dobado, *Pion Gas Viscosity*, hep-ph/0305151.
- [52] P. Danielewicz, *Phys. Lett.* **146B** (1984) 168.